A FELÜLETRE VONATKOZÓ JORDAN-TÉTEL MEGFORDÍTÁSA

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

A KOLOZSVÁRI FERENCZ JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARÁNAK BENYUJTJA

KALUZSAY KÁROLY

BUDAPEST

1914

A FELÜLETRE VONATKOZÓ JORDAN-TÉTEL MEGFORDÍTÁSA

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

A KOLOZSVÁRI FERENCZ JÓZSEF TUDOMÁNYEGYETEM MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARÁNAK BENYUJTJA

KALUZSAY KÁROLY

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

BUDAPEST

1914

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544719_0027

A térben a felületre vonatkozó JORDAN-tételnek, azaz a JORDAN-tétel térre való kiterjesztésének megfordítása nem végezhető el a síkbeli feltételekhez hasonló feltételek mellett.[1] A síkban egy H halmaznak egy körre való kölcsönösen egyértékű és folytonos leképezhetőségéhez elegendő, ha teljesülnek a következő — egyébként szükséges — feltételek:

1. a H halmaz zárt,

2. a síkot két összefüggő területre osztja szét,

3. a H bármely pontja ezen területek belső pontjaiból a a terület belsejében haladó folytonos úttal elérhető.

A térben, mint L. E. J. BROUWER egy példán kimutatta,[2] e feltevések nem elegendők. A H-nak egy F felületre való kölcsönösen egyértékű és folytonos leképezhetőségéhez, amint gömbfelület esetében e példán is igazolható, nem elegendő feltenni, hogy a térnek a H-n kívül levő részei magukban is, kölcsönösen is, époly összefüggési viszonyokkal bírnak, mint az F felületen kívül levő részei és hogy a H bármely pontja, mint a tér egy H-n kívül levő részének határpontja, ennek pontjaiból egy benne haladó folytonos úton elérhető. Az elérhetőség feltételét tehát egy «erősebb» feltétellel pótoljuk, amely a H-n kívül levő térnek a H közelében való magatartására vonatkozik és amelyben kifejezett tulajdonságát a H-nak — más formában

---

[1] A síkbeli megfordításra nézve l. különösen: A. SCHOENFLIES, Beiträge zur Theorie der Punktmengen, Math. Ann. 1903. 195. old. és RIESZ F., Über einen Satz der Analysis situs, u. o. 1904. 409. old., vagy A. SCHOENFLIES, Bericht über die Lehre von Punktmannigfaltigkeiten II, mely egyéb idevonatkozó kérdéseket is tárgyal.

[2] Math. Ann. 1911. 321. old.

ugyan — L. E. J. Brouwer az «Unbewalltheit» névvel jelöli és teljesültét minden «Jordansche Mannigfaltigkeit»-ra igazolja.

E dolgozat tárgya a gömbfelületre vonatkozó térbeli Jordan-tétel megfordítása. Feltételeink a következők:

Legyen H egy zárt, korlátos ponthalmaz a térben, mely a térnek rajta kívül levő pontjait úgy osztja két részre, B és K-ra, hogy

1. a B (és hasonlóan a K) bármely két pontja összeköthető egy véges számú egyenes darabból álló poligonúttal, amely egészen a B (K) belsejében van,

2. a B (K) belsejében levő bármely zárt poligon a B-ben (K-ban) a H érintése nélkül folytonos deformációval egy ponttá összehúzható,

3. bármely poligonút, mely a B egy pontját a K egy pontjával köti össze, tartalmazza a H-nak legalább egy pontját,

4. H bármely pontja torlódási pontja egy B-beli $U_{b_1}, U_{b_2}, \ldots$ s egy K-beli $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots$ pontsorozatnak,[1]

5. ha $U_1U_1', U_2U_2', \ldots$ oly pontpárok sorozata a B-ben (vagy K-ban), hogy az $U_\nu U_\nu'$ pontok távolsága, ε_ν növő ν-vel a 0-ig csökken és az összes pontok a H egy R pontjában torlódnak, akkor e pontok kettőnként olyan $l_1, l_2, \ldots$ poligonutakkal köthetők össze a B (K) belsejében, melyek külön-külön véges számú egyenesdarabból állanak és egy 0-ig csökkenő sugarú gömbsorozat egy-egy gömbjébe zárhatók.[2]

---

[1] E feltételekből következik az is, hogy a H halmaz összefüggő. Mert ha létezne egy H-n kívüli F felület, melyen kívül is, belül is vannak a H-nak, s így B-nek és K-nak is pontjai, akkor F egészen csak a B-ben (vagy K-ban) lenne s egy F-en belül levő U_{k_1} s rajta kívül levő U_{k_2} K-beli pontokból álló pontpár csak a B-beli F-en át volna összeköthető egymással, ami ellenkezik az 1. feltétellel.

[2] Ez az a feltevés, mely a B-nek és a K-nak a H közelében való magatartását jelöli meg. Belőle már következik az elérhetőség, azaz hogy a H bármely R pontja a B egy U_{b_1} (vagy a K egy U_{k_1}) pontjával összekötbető egy $(\overline{RU_{b_1}})$ — (vagy $\overline{RU_{k_1}}$) polígonúttal, mely R-t kivéve, egészen a B-ben (K-ban) van, és vagy véges számú egyenesdarabból áll, vagy ha végtelen sokból, akkor ezek egyetlen torlódási pontja az R pont. Mert egy R felé tartó $U_{b_1}, U_{b_2}, \ldots (U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots)$ pontsorozat szomszédos tagjai páronként összeköthetők az $l_1, l_2, \ldots$ utakkal s az $(l_1, l_2, \ldots)$ poligonút adja $(\overline{RU_{b_1}})$-t

Ha a H halmazra ezen feltételek teljesülnek, akkor a H egy gömb felületére kölcsönös egyértékű és folytonos módon leképezhető.

ELSŐ RÉSZ.[1]

1. §.

Folytonos görbének, vagy csak «görbé»-nek nevezzük az

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1)$$

koordináták által előállított ponthalmazt, ha x, y, z a t-nek folytonos és egyértékű függvényei. A t_0 és t_1-hez tartozó pontok a görbe végpontjai. Ha e végpontok összeesnek, a görbe zárt, ellenkező esetben nyilt. Az előbbit J'-vel, ezt I'-vel jelöljük. J' egy j' körnek, I' egy i' egyenesdarabnak egyértékű és folytonos leképezése. Ha J' és j', vagy I' és i' pontjai közt a megfelelés kölcsönösen egyértékű, J' és I'-t Jordan-féle görbéknek nevezzük és J, I-vel, j', i'-t pedig j, i-vel jelöljük.

Az M halmazt «ε-nyi pontossággal»[2] megközelítő poliedrális felületet $F_\varepsilon(M)$-el jelöljük, ennek belsejét, ha egy darabból áll, amelyben M is van, «$F_\varepsilon(M)$ test»-nek nevezzük. Így használjuk más felületnél is ezen elnevezést.

A zárt poligont Π-vel, a nyilt poligonvonalat, azaz poligonutat E-vel, a síkbeli kör belső területére kölcsönös egyértékű és folytonos módon leképezhető poliedrális lapot L-lel, a hasonló módon gömbre leképezhető «gömbtipusú» poliedrális felületet G-vel jelöljük.

Egy $M_1, M_2, \ldots$ halmazsorozatot 0-ig csökkenő kiterjedésűnek nevezünk, ha a sorozat tagjai egyenként a 0-ig csökkenő sugarú $G_1, G_2, \ldots$ gömbökbe zárhatók.

—($\overline{RU_{k_1}}$-t). Ezenpoligonutak, ha többszörös pontjaik vannak, ezektől elegendő kicsiny deformációk által tulajdonságaik változása nélkül szabadíthatók meg. A H bármely két P, Q pontja egymással is összeköthető a B (vagy K) belsejében egy b (k) poligonúttal.

[1] Az első rész a definiciókat, jelölésmódokat és segédtételeket tartalmazza.

[2] «im Abstand ε». L. Schoenflies, Bericht über die Lehre von Punktmannigfaltigkeiten II. 105, 136. old.

Minden halmaz, melyre a folytonos deformációt és az átfogást definiáljuk, zárt.

Zárt vagy nyilt poligonjaink közönségesen véges számú egyenesdarabból állanak, esetleg azonban végtelen sokból is, de ekkor hosszaik 0-ig csökkennek és a poligonnak csak véges számú pontjában torlódnak.

2. §.

Legyen az $M^{(o)}$ halmaz az M halmaznak folytonos és egyértékű képe, úgy, hogy $M^{(o)}$-nak lehetnek «többszörös» pontjai is. $M^{(o)}$-nak a folytonos deformációja, vagy röviden: deformációja alatt általánosabb értelemben az $M^{(o)}$ oly időbeli deformációját értjük, melynél a t pillanatbeli deformált halmaz, $M^{(t)}$ szintén folytonos és egyértékű képe az M-nek, egészen általános értelemben, úgy, hogy egy M-beli zárt halmaznak az $M^{(o)}$, vagy $M^{(t)}$-ben esetleg csak egy pont felel meg, és amely deformációnál minden pont a deformáczió ideje alatt folytonos görbét ír le. Ha a deformáczió végén a t pillanatban a $M^{(t)}$ egyetlen pontból áll, akkor $M^{(o)}$-t «egy pontba húztuk össze». Ha $M^{(o)}$ azonos M-el, úgy, hogy nincsenek többszörös pontjai, akkor M-el jelöljük.

A poliedrális felületeknek és poligonoknak folytonos deformációjára nézve egyebek mellett különösen a következő tételeket használjuk fel:

1. Egy gömbtipusú G test a belsejével együtt egy rajta belül levő pontba deformálható önmagában való deformáczióval.

2. Legyen Π egy F poliedrális felületen levő többszörös pontok nélküli oly zárt poligon, amelyen át az F belsejében egy L lap fektethető át és amely egy más, az F-en belül levő F_1 felület vagy más halmaz érintése nélkül egy pontba összehúzható. Ha ezen L lap mentén való «szétmetszéssel» (3. *a*, *b*. ábr.) az F felület összefüggési rendszáma eggyel csökken, akkor a Π-n át oly L_1 lap is fektethető az F belsejében, mely az F_1-et nem metszi.

3. Egy G gömbtipusú felület belsejében levő két nyilt poligonvonal, ha végpontjaik közösek, a végpontok fix helyzete

mellett egymásba deformálható a G belsejében úgy, hogy bármely pillanatban a deformált poligonvonal szintén poligonvonalat alkot.

4. Egy poliedrális felület, mely egy zárt M halmazt vesz körül, ha többszörös pontjai vagy vonalai vannak, — amilyen pl. a közös csúcs vagy él két, csúcsával vagy élével érintkező koczka felületénél, — kicsiny deformációkkal ezektől megszabadítható, úgy, hogy véges összefüggési rendszámmal bíró, többszörös pontok és vonalak nélküli felület, egy vagy esetleg több is, válik belőle, amely szintén magába zárja az M-t.

3. §.

Egy $M_1^{(o)}$ halmazról akkor mondjuk, hogy átfogja az $M_2^{(o)}$ halmazt, — amelynek egy pontja sem közös az $M_1^{(o)}$-al, — ha nem húzható össze egy pontba anélkül, hogy deformáczió közben legalább egyszer ne legyen közös pontja az $M_2^{(o)}$-al. Ha ennek érintése nélkül húzható össze egy pontba, akkor át nem fogja. Ha $M_1^{(o)}$ át nem fogja $M_2^{(o)}$-t, akkor még meglehet, hogy $M_2^{(o)}$ átfogja az $M_1^{(o)}$-t.

1. Ha $M_1^{(o)}$-t az $M_2^{(o)}$ érintése nélkül deformáljuk egy $M_1^{(t)}$-be, akkor ez is aszerint átfogja vagy át nem fogja $M_2^{(o)}$-t, amint $M_1^{(o)}$ átfogja vagy át nem fogja.

2. Ha $M_1^{(o)}$ és $M_2^{(o)}$ az $M_3^{(o)}$-t át nem fogják és egyikök, pl. $M_2^{(o)}$ folytonos deformáczióval vihető át az M_1 és M_2 közös pontjai halmazának K_{12}-nek a képébe, $K_{12}^{(o)}$-ba úgy, hogy deformáczió közben $K_{12}^{(o)}$ fix helyzetű marad, akkor az M_1 és M_2 összes pontjaiból álló M_{12} halmaznak a képe, $M_{12}^{(o)}$ sem fogja át $M_3^{(o)}$-t. Mert $M_2^{(o)}$ a $K_{12}^{(o)}$-ba deformálható és ezzel, azaz $M_1^{(o)}$-al együtt az $M_1^{(o)}$ deformácziója által egy pontba húzható össze.

Ha $M_1^{(o)}$ át nem fogja $M_2^{(o)}$-t, akkor bármely részhalmaza sem fogja át.

3. Legyen ε_1 és ε_2 oly kicsi, hogy $F_{\varepsilon_1}(M_1^{(o)})$ és $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ egymáson kivül vannak. Ha $M_1^{(o)}$ átfogja $M_2^{(o)}$-t, akkor átfogja $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t is, mert különben ennek, tehát $M_2^{(o)}$-nak érintése nélkül is egy

pontba volna összehúzható. Továbbá az $F_{\varepsilon_1}(M_1^{(o)})$ test és felület is átfogja $M_2^{(o)}$-t és $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t, mert ellenkező esetben érintésük nélkül vele együtt az $M_1^{(o)}$ is egy pontba volna összehúzható.

Felhasználjuk még a poliedrális felületekre és zárt poligonokra vonatkozó következő tételeket:

4. Ha egy közönséges, önmagába nem hatoló poliedrális felület egy másik poliedrális felületet vagy zárt poligont átfog, akkor létezik a határán vagy a belsejében egy zárt poligon, amely azt szintén átfogja.

5. Ha egy zárt poligon egy másik halmazt át nem fog, akkor létezik egy gömbtipusú G poliedrális felület, azaz test, amelynek belsejében van az elsőnek minden pontja, míg a halmaznak egy pontja sem. Azonban a G test esetleg olyan, hogy önmagába hatol. Ilyenkor is, bizonyos pontjait többszörösen számítva, felületét és belsejét közönséges gömbtipusú felületnek és testnek tekintjük és ezek tételeit alkalmazzuk reá.

6. Ha egy G gömbtipusú poliedrális felületen a poligonvonalak által határolt és esetleg többszörösen összefüggő $T_1, T_2, \ldots T_\varrho$ területek sem önmagukat, sem egymást át nem fedik és egy többszörös pontok nélküli zárt Π poligont át nem fognak, akkor a Π-nek egy G-n belül levő U_b s egy G-n kivül levő U_k pontja által meghatározott E_1 és E_2 ivein található a G-vel való metszőpontjai közt két P, Q pont, — P az E_1-n, Q az E_2-n, — amelyek a $T_1, T_2, \ldots T_\varrho$ területek érintése nélkül köthetők össze a G felületén egy E poligonvonallal.

4. §.

Ha az $M_1^{(o)} \equiv M_1$ *halmaznak nincsenek többszörös pontjai és át nem fogja az* $M_2^{(o)}$*-t, akkor elég kicsiny* ε_1 *mellett az* $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ *közelítő felület és test sem fogja át* $M_2^{(o)}$*-t:*

M_1 legyen összefüggő halmaz.

Kicsiny ε_2 mellett mindazon pontok, melyeket az M_1 egy pontba való bizonyos összehúzása közben érint, az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-n kivül vannak, úgyhogy M_1 ezt sem fogja át. Ha tételünk nem

áll, akkor tehát $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ bármily kicsiny ε_1 mellett átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t, bár maga M_1 át nem fogja.

Létezik oly kicsiny ε, hogy az M_1 bármely pontja körül írt ε_2 sugarú G_ε gömbön kívül van az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ és hogy, ha $P^{(o)}$, $Q^{(o)}$ bármely két ε távolságú pontja az M_1-nek, akkor az őket összekötő $l^{(o)}$ egyenesdarab maga és bármely pillanatban deformáczió közben a $P^{(t)}$, $Q^{(t)}$ pontokat összekötő $l^{(t)}$ sem tartalmazza az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-nak egy pontját sem. $l^{(o)}$ tehát a változó t idejű $l^{(t)}$ helyzeteken át M_1-el együtt az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ érintése nélkül egy pontba húzható össze.

Borel tétele szerint a G_ε gömbökből kiválasztható végesszámú úgy, hogy az M_1 bármely pontja legalább egynek közülök a belső pontja legyen. Ezen végesszámú gömb alkotta F_y test a külső felületén nem tartalmazza az M_1-nek egy pontját sem és átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t, ha bármily kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ is átfogja, mert elegendő kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_1}(M_1)$ egészen az F_y belsejében van. Létezik tehát az F_y belsejében (3. §. 4.) egy, végesszámú egyenesdarabból álló zárt Π' poligon, amely átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t. Ha egy $R_0^{(o)}$ pont G_ε-féle gömbjéből kiindulva a Π' poligon az $R_1^{(o)}$, azután az $R_2^{(o)}$ pont stb. gömbjébe ér, akkor ezen M_1-beli

$$R_0^{(o)},\ R_1^{(o)},\ R_2^{(o)},\ \ldots\ R_n^{(o)} \equiv R_0^{(o)}$$

pontok sorozatának, — amely sorozatban egy pont többször is előjöhet, — a G_ε-féle gömböknek egy

$$G_0,\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_n \equiv G_0$$

láncza felel meg, amely maga is, mint test, és a benne levő $R_\nu^{(o)} R_{\nu+1}^{(o)}$ szomszédos pontpárokat összekötő $l_\nu^{(o)}$ egyenes vonaldarabokból összeállított

$$\Pi^{(o)} \equiv (l_0^{(o)},\ l_1^{(o)},\ \ldots\ l_n^{(o)})$$

zárt poligon is átfogja az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t, mert Π' e gömbökön belül a $\Pi^{(o)}$-ba deformálható. Ezen $\Pi^{(o)}$ poligon azonban a változó t idejű

$$\Pi^{(t)} \equiv (l_0^{(t)},\ l_1^{(t)},\ \ldots\ l_n^{(t)})$$

poligonokon át az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$ érintése nélkül az M_1-el együtt egy pontba húzható össze, ami nem lehetséges, ha átfogja $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t, mert a $\Pi^{(t)}$ poligon minden t pillanatban zárt poligon marad, mivel az $R_\nu^{(t)}$ pontoknál sohasem szakadhat ketté. M_1-nek u. i. többszörös pontjai nincsenek és így deformáczió közben egy $R_\nu^{(o)}$ sem válhatik két ponttá.

$F_{\varepsilon_1}(M_1)$ tehát nem foghatja át bármily kicsiny ε_1 mellett az $F_{\varepsilon_2}(M_2^{(o)})$-t és így $M_2^{(o)}$-t sem.

5. §.

Legyen $M_1^{(o)}$, $M_2^{(o)}$, ... 0-ig csökkenő kiterjedésű halmazok sorozata, melyek valamennyien átfogják az $M^{(o)}$-t és az R pontban torlódnak. Akkor R az $M^{(o)}$-nak a pontja.

Ha R az $M^{(o)}$-tól különböző pont, akkor egy véges sugarú G gömböt lehet írni köréje, amelyen kívül van az $M^{(o)}$ minden pontja. Ekkor egy n indexen túl valamennyi $M_{n+1}^{(o)}$ a G belsejében lenne, tehát át nem fogná $M^{(o)}$-t, a feltétel ellenére. És hasonló módon abból is, hogy $M^{(o)}$ fogja át a 0-ig csökkenő kiterjedésű és az R pontban torlódó $M_1^{(o)}$, $M_2^{(o)}$, ... halmazokat, következik, hogy R az $M^{(o)}$ pontja.

6. §.

Ha egy G gömbtipusú test belsejében a P és Q pontokat az I' görbe és az E_0 poligonvonal kötik össze, akkor ezek a P és Q pontok fix helyzete mellett egymásba deformálhatók a G belsejében.

I' egy i' egyenesdarabnak a képe. Ez utóbbit n egyenlő részre osztjuk a

$$p_0^{(1)} \equiv p,\ p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots p_n^{(1)} \equiv q$$

pontokkal, ha p és q a végpontok.

Az I'-beli megfelelő

$$P_0^{(1)} \equiv P,\ P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots P_n^{(1)} \equiv Q$$

pontokat, ha n elég nagy, a G belsejében lehet páronként össze-

kötni az $l_\nu^{(1)} = (P_\nu^{(1)} P_{\nu+1}^{(1)})$ egyenesdarabokkal. Ily módon egy poligonvonal származott:

$$E_1 \equiv (l_0^{(1)}, l_1^{(1)}, \ldots l_{n-1}^{(1)}).$$

Egy-egy $(p_\nu^{(1)} p_{\nu+1}^{(1)})$ intervallumot ismét n részre osztunk a

$$p_0^{(2)} \equiv p_\nu^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots p_n^{(2)} \equiv p_{\nu+1}^{(1)}$$

pontokkal. A megfelelő

$$P_0^{(2)} \equiv P_\nu^{(1)}, P_0^{(2)}, \ldots P_n^{(2)} \equiv P_{\nu+1}^{(1)}$$

pontokat páronként a G belsejében az

$$l_0^{(2)}, l_1^{(2)}, \ldots l_{n-1}^{(2)},$$

egyenesekkel kötjük össze. A

$$\lambda_\nu^{(1)} \equiv (l_0^{(2)}, l_1^{(2)}, \ldots l_{n-1}^{(2)})$$

poligonvonalak együtt az

$$E_2 \equiv (\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \ldots \lambda_{n-1}^{(1)})$$

poligonvonalat adják, mely szintén a P, Q pontokat köti össze.

Hasonló módon szerkesztjük az E_3-at, melynél egy-egy

$$l_r^{(2)} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots n^2 - 1)$$

egyenesét az E_2-nek a

$$\lambda_r^{(2)} \equiv (l_0^{(3)}, l_1^{(3)}, \ldots l_{n-1}^{(3)})$$

poligonvonallal helyettesítjük és

$$E_3 \equiv (\lambda_0^{(2)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_{r^2-1}^{(2)})$$

tesszük. Ezt így vég nélkül folytatjuk. Az

$$(l_{r_1}^{(1)} \lambda_{r_1}^{(1)}) \quad (r_1 = 0, 1, \ldots n-1)$$

poligonokat egy-egy G_{ε_1} gömbbe, az

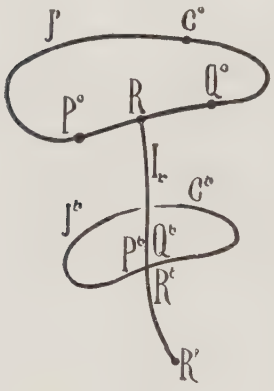
$$(l_{r_2}^{(2)} \lambda_{r_2}^{(2)}) \quad (r_2 = 0, 1, \ldots n^2 - 1)$$

poligonokat egy-egy G_{ε_2} gömbbe stb. zárjuk. Ha G belsejében E_0-t az E_1-be deformáljuk a végpontok fix helyzete mellett s hasonlóan minden $l_{r_\nu}^{(\nu)}$-t a megfelelő $\lambda_{r_\nu}^{(\nu)}$-be a megfelelő G_{ε_ν}-ben és az összes $G_{\varepsilon_1}, G_{\varepsilon_2}, \ldots$ gömbök sugarai növő ν-vel a 0-ig csökkennek, akkor így E_0 az l'-be deformálódik a kívánt módon az E_k poligonvonalak közvetítésével. Hasonlóan egy E_0 közvetítésével a P, Q pontokat a G belsejében összekötő két tetszésszerinti l_1', l_2' görbe is egymásba deformálható.

7. §.

Ha egy zárt J' görbe át nem fogja az $M^{(0)}$ halmazt, akkor bármely saját R pontjába is összehúzható ezen pont fix helyzete mellett az $M^{(0)}$ érintése nélkül.

J' egy j' körnek a képe. Az R pont általában egy j'-beli zárt halmaz összes pontjainak a képe. Ahhoz, hogy tételünk igaz legyen, szükséges és elégséges, hogy a j' ezen halmazon kívüli $j'_1, j'_2, \ldots$ íveinek megfelelő $J'_1, J'_2, \ldots$ zárt görbék (melyekhez az R pontot is hozzászámítjuk) legyenek 0-ig csökkenő sugarú gömbök belsejében egyenként az R-be, ennek fix helyzete mellett, összehúzhatók.



1. ábra.

Mivel R az $M^{(0)}$-tól különböző pont, azért az J'_ν görbék egy elég nagy indextől kezdve R körül írt, 0-ig csökkenő sugarú gömbökbe zárhatók s ezekkel együtt az R-be összehúzhatók. A megmaradt véges számú J'_ν görbék bármelyikét ismét J'-vel jelöljük, azaz ez utóbbiról feltehetjük, hogy R-nek egyetlen r pont felel meg a j'-ben. Ha J' az $M^{(0)}$-et át nem fogja, akkor ennek érintése nélkül húzható össze valamely R' pontba a $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ időközben a D deformációval.

J'-nek az R pontba való összehúzását a $(0, t_1)$, (t_1, t_2), (t_2, t_3) időközökben a következő módon végezzük (1. ábra). Legyen p, q két egymástól és az r-től különböző pontja a j'-nek. J'-beli megfelelő pontjaik $P^{(0)}$, $Q^{(0)}$. A $(0, t_1)$ időközben a J'-t önmagában oly módon deformáljuk, hogy a $(P^{(0)}, R, Q^{(0)}) \equiv I_1^{(0)}$ ívét az R pontba húzzuk össze, míg a másik $(P^{(0)}, C^{(0)}, Q^{(0)}) \equiv I_2^{(0)}$ ívét végpontjaival az R pontig nyújtjuk ki.[1]

Tehát $I_1^{(t_1)} \equiv R$ és $I_2^{(t_1)} \equiv J'$.

---

[1] $I_1^{(0)}$ és $I_2^{(0)}$ általában nem JORDAN-görbék.

A (t_1, t_2) időközben a deformációt úgy folytatjuk, hogy $I_2^{(t_1)}$-et J'-nek a D deformációbeli $J'^{(t)}$ helyzetein át húzzuk össze az R' pontba $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$, miközben végpontjai $P^{(t)}$ és $Q^{(t)}$ folyton azonosak maradnak a D-beli $R^{(t)}$-vel és az $R^{(t)}$ által a D deformációban leírt I_r' görbét futják be. Ugyanekkor $I_1^{(t)}$ az I_r'-beli kétszeresen számított $(P^{(t)}R,\ RQ^{(t)})$ görbéből áll, amelyre ily sorrendben képezzük le a $(P^{(0)}R,\ RQ^{(0)})$ íveket. Tehát ezen deformációban $J'^{(t)} \equiv (P^{(t)},\ R,\ Q^{(t)},\ C^{(t)},\ P^{(t)})$ és $I_1^{(t_2)} \equiv (R'R,\ RR')$, $I_2^{(t_2)} \equiv R'$. A $(t_2 \leqq t \leqq t_3)$ időközben I_r'-nek önmagában az R pontba való összehúzódása szolgáltatja az J' deformációját. Azaz $I_2^{(t)}$ most folyton egy pont marad és I_r'-n R'-ből az R-be halad, míg $I_1^{(t)}$ a kétszeresen számított, I_r'-beli $(R\ I_2^{(t)})$ ívből áll.

MÁSODIK RÉSZ.

8. §.

H legyen egy halmaz, melyre a bevezetésben említett feltételek teljesülnek.

Ha $P_1Q_1,\ P_2Q_2, \ldots$ *olyan pontpárok sorozata a* H*-ban, amelyek* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *távolságai* 0*-ig csökkennek s a pontok egy* R *pontban torlódnak, akkor ezen pontpárok a* 0*-ig csökkenő kiterjedésű* $\beta_1 \equiv (\overline{P_1Q_1})$, $\beta_2 \equiv (\overline{P_2Q_2}), \ldots$ *poligonutakkal köthetők össze* a B-ben.

Mert a B egy U_b pontjából e pontokhoz húzott B-beli $(\overline{U_bP_1})$, $(\overline{U_bQ_1})$, $(\overline{U_bP_2})$, $(\overline{U_bQ_2}), \ldots$ poligonutakon lehet választani olyan $U_1,\ U_1',\ U_2,\ U_2', \ldots$ pontokat, melyek szintén az R-ben torlódnak. E pontokat páronként az 5) feltétel szerint lehetséges $l_1 \equiv (\overline{U_1U_1'})$, $l_2 \equiv (\overline{U_2U_2'}), \ldots$ 0-ig csökkenő kiterjedésű poligonutakkal kötjük össze és ekkor

$$\beta_1 \equiv (\overline{P_1U_1U_1'Q_1}),\quad \beta_2 \equiv (\overline{P_2U_2U_2'Q_2}), \ldots$$

A $\beta_1, \beta_2, \ldots$-höz hasonló $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ poligonutak léteznek a K-ban. Feltehetjük, hogy ezen $\beta_\nu, \varkappa_\nu$ utak egyike sem bír

többszörös ponttal, mert kicsiny deformációkkal ezektől megszabadíthatók.

Ebből az is következik, hogy bármily kicsiny δ-hoz található oly kicsiny ε, hogy a H bármely két, egymástól ε-nál kisebb távolságra levő P, Q pontjához található egy δ sugarú gömbbe zárható $(\beta, \varkappa)$ zárt poligon. Mert ellenkező esetben található volna egy P_1Q_1, P_2Q_2, ... pontpársorozat egy torlódási ponttal és 0-ig csökkenő ε_1, ε_2, ... távolságokkal, a melynél bármely $P_\nu Q_\nu$ pontpárhoz csak egy véges δ-nál nagyobb sugarú gömbbe zárható $(\beta_\nu, \varkappa_\nu)$ zárt poligon található, ami nem lehetséges.

9. §.

A H bármely két P, Q pontja összeköthető egy nyílt JORDAN*-féle görbével, mely egészen a H-hoz tartozik.*

A P és Q pontokat a B-ben és K-ban a b és k poligonutakkal kötjük össze. Feltehető, hogy a (b, k) zárt poligonnak nincsenek többszörös pontjai. Az összekötő JORDAN-görbe szerkesztése bármely adott G gömbtipusú test belsejében végezhető, mihelyt a (b, k) poligon is egészen ennek a belsejében van. A G test esetleg önmagába is hatolhat.

A (b, k) poligonon át, ha nem hurkolt, egy L poliedrális lapot lehet fektetni a G belsejében. Ha hurkolt, akkor választhatók (2. ábra) olyan ... P_2, P_1, Q_1, Q_2, ... pontok a b-n és ... P_2', P_1', Q_1', Q_2', ... pontok a k-n, hogy ezen sorozatok bármelyike jobbfelé is, balfelé is vagy végesszámú vagy végtelen sok tagból áll, de úgy, hogy a P_ν és P_ν' pontok külön s Q_ν és Q_ν' pontok külön egyidejűleg vannak véges vagy végtelen számmal s az előbbiek a P, az utóbbiak a Q pontban torlódnak, továbbá e pontok — tekintet nélkül a H pontjaira, — a G belsejében úgy köthetők össze páronként a 0-ig csökkenő kiterjedésű

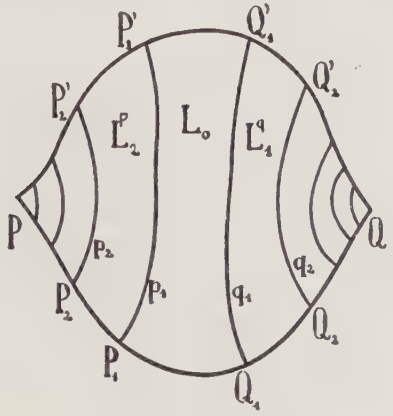
$$p_1 \equiv (\overline{P_1P_1'}),\ p_2 \equiv (\overline{P_2P_2'}),\ \ldots\ q_1 \equiv (\overline{Q_1Q_2'}),\ q_2 \equiv (\overline{Q_2Q_2'}),\ \ldots$$

poligonutakkal, hogy a

$$\ldots (\overline{P_2P_1P_1'P_2'}),\ (\overline{P_1Q_1Q_1'P_1'}),\ (\overline{Q_1Q_2Q_2'Q_1'}),\ldots$$

zárt poligonok már nem hurkoltak és a 0-ig csökkenő kiterjedésű $\ldots L_2^{(p)}, L_1^{(p)}, L_0, L_1^{(q)}, L_2^{(q)}, \ldots$ poliedrális lapok fektethetők át rajtuk a G belsejében. Ezek általában egymást sokszorosan átmetszik, de ha egy pontot, mely több különálló $L_\nu^{(p)}$ vagy $L_\nu^{(q)}$ laphoz tartozik, mindegyikhez külön tartozónak számítunk, akkor e lapok összesen egy egyszerű L poliedrális lapot adnak, melynek határa a (b, k) poligon.

Legyen $\delta^{(1)}$ oly kicsiny szám, hogy egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömb, ha felületén vagy belsejében csak egy pontja is van az L-nek,



2. ábra.

egészen a G belsejében van. Továbbá legyen $\varepsilon^{(1)}$ oly kicsiny, hogy ha $P'Q'$ bármely két, $\varepsilon^{(1)}$ távolságú pontja a H-nak, található hozzájuk egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható $(\beta, \varkappa)$ poligon. Ha tehát P', Q' az L-ben van, a $(\beta, \varkappa)$ poligon a $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbel együtt a G belsejében lesz.

A H-nak az L-ben levő pontjai egy zárt M halmazt alkotnak, amelynek az a tulajdonsága, hogy bármely L-beli poligonút, mely a b-nek egy U_b pontját a k-nak egy U_k pontjával köti össze, tartalmazza az M-nek legalább egy pontját. Az M minden pontja körül írjunk egy $\varepsilon^{(1)}/_2$ sugarú gömböt. Borel tétele szerint e gömbök közül kiválasztható végesszámú

úgy, hogy az M bármely pontja ezek közül legalább egynek a belsejében van. Számítsuk hozzájuk, ha oda nem tartoznának, a P és Q körül írt gömböket is. Ha $\varepsilon^{(1)}$ elég kicsiny, az U_b és U_k pontok e gömbökön kívül vannak. Ezen végesszámú gömb egy összefüggő testet alkot, vagy kiválasztható belőlük egy összefüggő test, melynek belsejében van P is, Q is, mert különben található volna az L-ben egy poligonút, mely az U_b és U_k pontokat köti össze és e gömbökön, tehát a H pontjain is kívül van. Ezen test belsejében P és Q összeköthetők egy véges számú egyenesből álló λ poligonúttal, a mely az L-ből ki is léphet. Ha a λ út a P körül írt gömb elhagyása után a $P_1^{(1)}$ pont gömbjébe, innen a $P_2^{(1)}$-ébe, stb. ér, a

$$P \equiv P_0^{(1)},\ P_1^{(1)},\ P_2^{(1)}, \ldots P_n^{(1)} \equiv Q$$

végesszámú tagból álló pontsorozatban bármely két szomszédos pont $\varepsilon^{(1)}$-nél kisebb távolságra van egymástól. E sorozatban egy pont többször is előjöhet.

Minden szomszédos $P_\nu^{(1)} P_{\nu+1}^{(1)}$ pontpárhoz található egy $\delta^{(1)}$ sugarú $G_\nu^{(1)}$ gömbbe zárható $(\beta_\nu,\ \varkappa_\nu)^{(1)}$ zárt poligon. Minden $G_\nu^{(1)}$ a G belsejében van. E $G_\nu^{(1)}$ gömbök bármelyikét röviden $G^{(1)}$-el is jelöljük.

Egy i' egyenesdarabot, melynek végpontjai p és q, n egyenlő részre osztunk a

$$p \equiv p_0^{(1)},\ p_1^{(1)},\ p_2^{(1)}, \ldots p_n^{(1)} \equiv q$$

pontokkal és ezeket a megfelelő $P^{(1)}$pontokhoz rendeljük.

Ezután minden $G_\nu^{(1)}$ gömb belsejében folytatjuk a $(\beta_\nu,\ \varkappa_\nu)^{(1)}$ poligonnal azt, amit a $(b,\ k)$ poligonnal a G belsejében tettünk. Azaz a $(\beta_\nu,\ \varkappa_\nu)^{(1)}$ poligonon át fektethető a $G_\nu^{(1)}$ belsejében egy esetleg önmagát metsző $L_\nu^{(1)}$ lap és ennek segítségével kiválasztható az $L_\nu^{(1)}$-ben levő H-beli pontok közül olyan

$$P_\nu^{(1)} \equiv P_0^{(2)},\ P_1^{(2)},\ P_2^{(2)}, \ldots P_{n_\nu}^{(2)} \equiv P_{\nu+1}^{(1)}$$

sorozat, a melyben két-két szomszédos pont egymástól $\varepsilon^{(2)}$-nél kisebb távolságra van és egy a $G_\nu^{(1)}$ belsejében levő $\delta^{(2)}$ sugarú $G^{(2)}$ gömbben köthető össze egy $(\beta,\ \varkappa)^{(2)}$ zárt poligonnal.

i'-nek a $p_\nu^{(1)} p_{\nu+1}^{(1)}$ intervallumát n_ν egyenlő részre osztjuk a

$$p_\nu^{(1)} \equiv p_0^{(2)},\ p_1^{(2)},\ p_2^{(2)}, \ldots p_{n_\nu}^{(2)} \equiv p_{\nu+1}^{(1)}$$

pontokkal és ezeket a megfelelő $P^{(2)}$ pontokhoz rendeljük. Ezen eljárást folytatjuk minden $G^{(1)}$ gömbben, azután minden $G^{(1)}$-nek minden $G^{(2)}$ gömbjében, stb., vég nélkül s úgy, hogy a $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, ...-féle gömbök minden olyan sorozatában, melynél bármely $G^{(\nu+1)}$ tagja a sorozatnak az előtte levő $G^{(\nu)}$-n belül van, a megfelelő $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, ... számok és a $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ gömbsugarak a 0 felé tartanak. Egy ily sorozatban levő sorozata a

$$P_\nu^{(1)} P_{\nu+1}^{(1)},\ P_{\nu_1}^{(2)} P_{\nu_1+1}^{(2)},\ P_{\nu_2}^{(3)} P_{\nu_2+1}^{(3)}, \ldots \qquad (\nu < n,\ \nu_1 < n_\nu, \ldots)$$

pontpároknak egyetlen R torlódási ponttal bir a H-ban és ezen R-hez rendeljük az i'-ben levő, fokonként egymáson belül fekvő, hasonló nevű intervallumok egyetlen r torlódási pontját. Mindezt végezzük tekintet nélkül arra, hogy ily módon a H egy pontjához az i'-nek egy vagy több pontját rendeltük-e.

Mindazon pontjai a H-nak, melyekhez az i' valamely pontját rendeltük, egy I' folytonos nyilt görbét alkotnak, mely az i'-nek egyértékű és folytonos képe és a P, Q pontokat köti össze. I'-ből egy I nyilt JORDAN-görbét választunk ki, mely szintén a P, Q pontokat köti össze.

Két pontot, melyek az i'-ben különbözők, de az I'-beli megfelelő pontjaik összeesnek, azonosak, röviden «összeesőknek» nevezzünk az i'-ben. i'-ben a p-vel összeeső legmagasabb pont legyen p' és a $(p'\ q)$ intervallumban a q-val összeeső legalacsonyabb pont q' $(p' \not\equiv q')$. A $(p'q')$ intervallumban tehát már nem létezik olyan pont, amely a p', q' végpontok valamelyikével esne össze. A $(p'q')$ intervallumot felezzük a v ponttal. A $(p'v)$ intervallumban mindazon pontok, melyek mindegyikének van legalább egy összeeső ponttársa a $(v'q')$ intervallumban, ideértve a v pontot is, zárt halmazt alkotnak, a melynek van egy legalsó m pontja. Az m-mel a $(p'q')$-ben összeeső legmagasabb pont legyen m'. Ha az előbbi halmaz-

nak egy pontja sem létezik, akkor m legyen azonos v-vel. Hasonlóan m' is azonos lehet a v-vel.

$$p' < m \leqq v, \quad v \leqq m' < q'.$$

A $(p'm) \equiv \lambda_1$ és $(m'q') \equiv \lambda_2$ intervallumokban az m, m' pontpárt kivéve nem létezik több olyan összeeső pontpár, melynek egyik pontja λ_1-ben, a másik λ_2-ben volna. Továbbá a λ_1, λ_2 intervallumok bármely végpontja egy belső pontjukkal sem eshetik össze. E tekintetben λ_1 is, λ_2 is a $(p'q')$ intervallumhoz hasonlít, ha tehát λ_1-et a v_1, λ_2-t a v_2 ponttal felezzük, ezek két oldalán meghatározhatók úgy az m_1, m'_1; m_2, m'_2

$$(p' < m_1 \leqq v_1, \; v_1 \leqq m'_1 < m, \; m' < m_2 \leqq v_2, \; v_2 \leqq m'_2 < q')$$

pontpárok, amint m, m'-t határoztuk meg a $(p'q')$-ben.

A $(p'_1 m_1) \equiv \lambda_{11}$, $(m'_1 m) \equiv \lambda_{12}$, $(m' m_2) \equiv \lambda_{21}$, $(m'_2 q') \equiv \lambda_{22}$ intervallumok szintén birnak azzal a tulajdonsággal, hogy két-két szomszédos intervallum egymás felé eső végpontjait kivéve, amelyek összeeső pontok, nem létezik olyan összeeső pontpár, melynek két pontja a négy intervallum közül két különbözőben volna. Továbbá e négy intervallum egyikének a végpontja sem eshetik össze egy belső pontjával. Ezen eljárást az új intervallumok mindegyikében folytatjuk a felezőpontok segítségével s az új λ_{111}, λ_{112}, stb. intervallumokban és a továbbiakban is vég nélkül.

Az n-dik ismétléskor a 2^n számú, egymáson kivül levő intervallum szintén bir a λ_1, λ_2 vagy a λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{22} intervallumok tulajdonságaival és növő n-nel az összes intervallumok hosszai 0-ig csökkennek. Ha az intervallumokra osztást vég nélkül folytatjuk, az i'-nek mindazon pontjai, a melyek *bármely* n mellett a 2^n számú intervallum közül legalább egybe tartoznak, egy perfekt M halmazt alkotnak. Ha az M pontjait az i'-ben «összetoljuk», úgyhogy a kihagyott (mm'), $(m_1 m'_1)$, $(m_2 m'_2)$, ... intervallumok mindegyike egy ponttá húzódik össze és így végpontjaik azonosakká válnak, az M pontjai egy i kontinuummá válnak. I'-nek mindazon pontjai, amelyek

az M, azaz i valamely pontjához tartoznak, egy folytonos I görbét alkotnak, mely a P, Q pontokat köti össze és így i-nek folytonos és egyértékű képe. I-nek egy pontjához azonban már az i-nek szintén csak egy pontja tartozik. Mert ha I egy pontjához két különböző pont tartozna az i-ben, két különböző pont tartozna hozzá az i'-nek M halmazában is, anélkül, hogy e két pont az mm', $m_1m'_1$, $m_2m'_2$, ... pontpárok közül való lenne. Ezen két pont tehát bármely n mellett a megfelelő 2^n számú λ intervallum belső pontjai közt lenne és pedig két különböző intervallumban, ha n oly nagy, hogy a 2^n számú intervallum mindegyikének a hossza kisebb, mint a két pont távolsága. Ez azonban az intervallumok tulajdonságai miatt nem lehetséges.

I tehát Jordan-féle görbe.

Ha P_1Q_1, P_2Q_2, ... a H-nak olyan pontpárjai, hogy távolságaik ε_1, ε_2, ... 0-ig csökkennek és a H egy R pontjában torlódnak, akkor találhatók hozzájuk olyan $(\beta_1, \varkappa_1)$, $(\beta_2, \varkappa_2)$, ... zárt poligonok, melyek a 0-ig csökkenő sugarú G_1, G_2, ... gömbökbe zárhatók egyenként. Minden G_ν belsejében az előbbi módon a $(\beta_\nu, \varkappa_\nu)$ segítségével szerkeszthető egy I_ν Jordan-féle görbe, mely a P_ν, Q_ν pontokat köti össze, úgy hogy az $I_1, I_2, \ldots$ sorozat tagjainak kiterjedése 0-ig csökken.

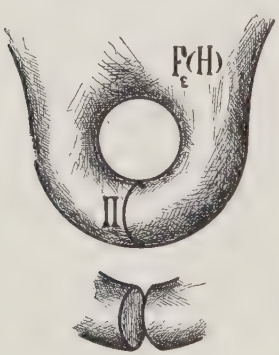
Ebből az is következik, hogy *bármily kicsiny δ-hoz található oly kicsiny ε, hogy a H bármely két pontja, ha távolságuk ε-nál kisebb, egy δ sugarú gömbbe zárható* Jordan-*görbével köthető össze.*

10. §.

A H a B-ben és a K-ban egy-egy gömbtipusú poliedrális felülettel közelíthető meg. Azaz ha M bármily halmaz a B-ben, melynek egy torlódási pontja sincs a H-ban, akkor létezik a B-ben egy gömbtipusú $G_\varepsilon(H)$ felület, melyen belül van az M és kivüle a H. Feltehetjük, hogy az M összefüggő, mert különben egy $F_{\varepsilon'}(H)$ felülettel választható el a H-tól, úgyhogy az M ezen belül van s ha $F_{\varepsilon'}(H)$-nak különálló darabjait, ha

ilyenek vannak, poligonutakkal kötjük össze a B-ben, ezek az $F_{\varepsilon'}(H)$ pontjaival együtt összefüggő halmazt alkotnak. Ha ezt zárjuk egy $G_\varepsilon(H)$-ba, az M is ezen belül lesz.

Legyen $F_\varepsilon(H)$ a B-ben oly közelítő felület, mely az M-t egészen magában fogalja. Mivel az M összefüggő, $F_\varepsilon(H)$-nak, ha több darabból áll, csak egyik darabjában lehet az M. Jelöljük ezt ismét $F_\varepsilon(H)$-val. $F_\varepsilon(H)$, ha többszörös pontjai vagy vonalai vannak, megszabadítható ezektől anélkül, hogy az M megszűnne rajta belül s a H rajta kívül lenni (2. §. 4.). Ha eközben több darabra esik szét, ezeknek ismét csak egyikében lehet az M és ezt is $F_\varepsilon(H)$-val jelöljük. Így az $F_\varepsilon(H)$ véges összefüggési rendszámmal biró, többszörös pontok és vonalak nélküli poliedrális felületté vált.



3. *a*, *b* ábra.

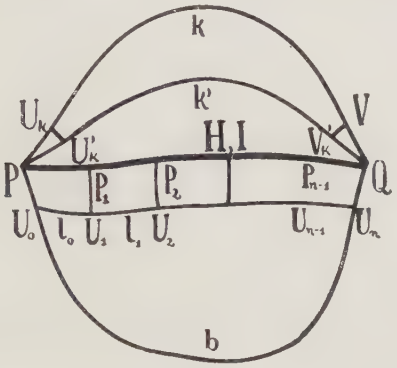
Legyen H egy zárt poligon az $F_\varepsilon(H)$-n, amelyen át egy L lap fektethető az $F_\varepsilon(H)$-n kívüli térben (3. *a.* ábra, úgyhogy ha ennek mentén az $F_\varepsilon(H)$-t «felmetszük», azaz két szomszédos L közti réteget az $F_\varepsilon(H)$ belsejéhez számítunk, a két L lapot pedig az $F_\varepsilon(H)$-hoz, akkor az $F_\varepsilon(H)$ összefüggési rendszáma eggyel csökken (3. *b.* ábra). A H poligon át nem foghatja a H-t, mert érintése nélkül a B-ben egy ponttá húzható össze, tehát (2. §. 2.) átfektethető rajta oly L_1 lap is az $F_\varepsilon(H)$-n kívüli térben, mely egészen a B-ben van. Ezen L_1 mentén végezzük az előbbi metszést. Az eljárás véges számú ismétlése után az $F_\varepsilon(H)$ a gömbtipusú $G_\varepsilon(H)$-vá alakul át, a melyen szintén belül van az M, mert minden metszés az $F_\varepsilon(H)$-n kívüli térben történt.

11. §.

1. Legyen l' egy nyilt folytonos görbe a H-ban a P, Q végpontokkal, melynek egy H-beli más zárt M halmazzal egy

közös pontja sincs. I' az M érintése nélkül a végpontjait a B-ben összekötő b poligonútba (vagy egy K-beli k-ba) deformálható végpontjainak fix helyzete mellett.

I'-n a $P_0 \equiv P, P_1, P_2, \ldots P_n \equiv Q$ pontokat választjuk ki úgy, hogy két-két szomszédosnak a távolsága ε-nál kisebb legyen. A B-nek egy U pontjából húzott $(\overline{UP_0}), (\overline{UP_1}), \ldots$ poligonutakon pedig az $U_0, U_1, \ldots$ pontokat (4. ábra) jelöljük ki, úgy, hogy $U_\nu P_\nu$ távolsága is, minden ν mellett, ε-nál kisebb. Kicsiny ε mellett bármely $U_\nu U_{\nu+1}$ pontpár oly $l_\nu \equiv (\overline{U_\nu, U_{\nu+1}})$ poligon-



4. ábra.

úttal köthető össze a B-ben, hogy I'-nek az $I'_\nu \equiv (P_\nu P_{\nu+1})$ íve a végpontjait összekötő $(\overline{P_\nu, U_\nu, U_{\nu+1}, P_{\nu+1}})$ poligonúttal együtt egy kicsiny G_ν gömbbe zárható, melyen kívül van az M, úgyhogy a G_ν-ben az I'_ν e poligonútba deformálható az M érintése nélkül (6. §.). A deformált I' a $(\overline{P_0, U_0, U_1, \ldots U_n, P_n})$ poligonútból és az $(\overline{U_1, P_1}), \ldots (\overline{U_{n-1}, P_{n-1}})$ utakból áll. Ez utóbbiak önmagukban való deformálással az U pontokba húzhatók össze, a megmaradt $(\overline{P_0, U_0, U_1, \ldots U_n, P_n})$ pedig $(\overline{P_0, U_0})$ és $(\overline{U_n P_n})$ részeinek fix helyzete mellett a $b \equiv (\overline{P\bar{U}Q})$-ba deformálható a B-ben.

Hasonló módon lehet egy H-beli J' zárt görbét, melynek egy H-beli más M zárt halmazzal nincs közös pontja, ennek érintése nélkül a B (vagy K) egy pontjába összehúzni.

Az J'-n felvett $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n \equiv P_0$ pontok által meghatározott I'_ν görbeíveket az előbbi módon lehet a megfelelő l_ν poligonutakba s ezáltal J'-t az $(l_0, l_1, \ldots l_{n-1})$ zárt poligonba deformálni, a mely a B-ben egy ponttá húzható össze.

2. Legyen P, Q két pont a H-ban, melyek nem tartoznak egy H-beli zárt M halmazhoz. *Ha a P, Q pontok egy (b, k) poligonja átfogja az M-t, akkor bármely más (b', k') poligonja is átfogja s ha az első át nem fogja, akkor ez sem fogja át.*

A (k, k') poligon át nem fogja az M-t, mert a P-hez és Q-hoz rajta elegendő közel választott U_k, U'_k, V_k, V'_k pontok közti $(\overline{U_k P U'_k})$ és $(\overline{V_k Q V'_k})$ ívek egy-egy kicsiny gömb belsejében az M érintése nélkül deformálhatók a K-beli $l_p \equiv (\overline{U_k U_k})$ és $l_q \equiv (\overline{V_k V'_k})$ ívekbe. Az így átalakított (k, k') poligon pedig a K-ban egy ponttá húzható össze (4. ábra). (k, k') tehát egy gömbtipusú testbe zárható, melyben nincs az M-nek egy pontja sem, és ennek belsejében a k a k'-be deformálható.

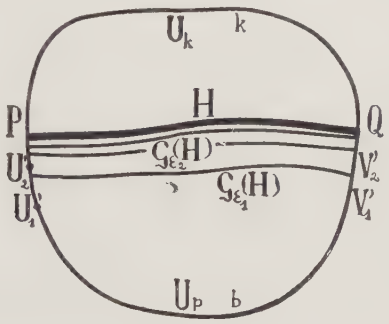
Így a (b, k) poligonnak a k, s hasonló módon a b íve vihető át deformáczióval a (b', k') poligon megfelelő ívébe, úgyhogy mindkettő egyszerre átfogó vagy át nem fogó poligon.

3. *Ha a (b, k) poligon az M zárt halmazt át nem fogja, akkor a P, Q pontok egy M-n kívüli I Jordan-görbével köthetők össze a H-ban.* Mert ekkor (b, k) egy gömbtipusú testbe zárható, melyen belül nincs az M-nek egy pontja sem, ezen belül létezik egy I, mely a P, Q pontokat köti össze (9. §.).

Ha pedig (bk) az M-t átfogja, akkor nem létezik olyan I Jordan-görbe (vagy csak folytonos görbe is) a H-ban, mely a P, Q pontokat köti össze és nem tartalmazza az M-nek egy pontját sem. Mert ha létezne egy ily I, az 1. szerint a k az I-be, ez pedig a b-be volna deformálható az M érintése nélkül, b pedig önmagában egy ponttá húzható össze, ami nem lehetséges, ha (b, k) az M-t átfogja.

4. *Ha M egy zárt és többszörös pontok nélküli halmaz a H-ban és át nem fogja a P, Q pontokat összekötő (b, k) poligont, akkor P és Q egy M-n kívüli I Jordan-görbével köthetők össze a H-ban.*

Legyen $U_1', U_2', \ldots, V_1', V_2', \ldots$ két oly pontsorozat a b-n, hogy az első a P, a második a Q pontban torlódik úgy, hogy bármely $U_{\nu+1}'$ és $V_{\nu+1}'$ két pont a b-nek a $(\overline{PU_\nu'})$ és $(\overline{QV_\nu'})$ darabjaiban van. U_b legyen a b-nek egy pontja az U_1', V_1' pontok közt, U_k pedig a k egy pontja. Legyen továbbá $G_{\varepsilon_1}(H)$, $G_{\varepsilon_2}(H), \ldots$ a H-t megközelítő oly gömbtipusú poliedrális felületek sorozata, hogy ezek növekvő index mellett összes pontjaikkal a H pontjaiban torlódnak és bármely ν mellett a $G_{\varepsilon_\nu}(H)$ belsejében van a b-nek az $U_\nu' V_\nu'$ pontok közt levő darabja és így az U_b pont is (5. ábra).



5. ábra.

Az M minden pontja körül írjunk ε_2 sugarú gömböt. Legyen az ε oly kicsi, hogy e gömbök egyike sem metszi a (b, k) poligont. Borel tétele szerint kiválasztható a gömbökből végesszámú úgy, hogy az M bármely pontja ezek közül legalább egynek a belsejében van. Kicsiny ε mellett a végesszámú gömb alkotta F_g test szintén át nem fogja a (b, k) poligont (4. §.). A $G_{\varepsilon_\nu}(H)$ felületének mindazon pontjai, melyek az F_g belsejében vagy határán vannak, végesszámú $T_\varrho^{(\nu)}$ területet alkotnak a $G_{\varepsilon_\nu}(H)$-n. Ezen területek poligonvonalak [1] által határolt és általában többszörösen összefüggő területek, melyek sem

[1] Itt általánosabb értelemben a körívek alkotta vonalakat is poligonoknak nevezzük.

önmagukat, sem egymást át nem fedik. Az $(\overline{U_b P U_k})$ és $(\overline{U_b Q U_k})$ poligonutaknak a $G_{\varepsilon_\nu}(H)$-val való metszőpontjai közül kiválasztható tehát két U_ν és V_ν pont, melyek a $G_{\varepsilon_\nu}(H)$ felületén a $T_\varrho^{(\nu)}$ területek érintése nélkül köthetők össze egy $E^{(\nu)}$ poligonúttal, mert a $T_\varrho^{(\nu)}$ területek az F_ν testtel együtt ennek belsejében a (b, k) poligon érintése nélkül húzhatók össze egy ponttá, tehát át nem fogják a (b, k)-t (3. §. 6.). Az $U_1, U_2, \ldots$ szorozat a P-ben, a $V_1, V_2, \ldots$ szorozat a Q-ban torlódik. Mindazon pontjai a H-nak, melyekben az $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots$ poligonutak torlódnak növekvő index mellett összes pontjaikkal, egy zárt M_ε halmazt alkotnak. Ezen halmaz összefüggő, úgyhogy kiválasztható belőle egy $P_0 \equiv P_1, P_2, \ldots P_n \equiv Q$ sorozat, melynek két-két szomszédos $P_\nu, P_{\nu+1}$ pontja adott kicsiny ε'-nél kisebb távolságra van egymástól. Mert ellenkező esetben létezne végesszámú $F_1, F_2, \ldots$ test, melyek különállók és az M_ε összes pontjait a belsejökbe zárják. Azonban valamennyi $E^{(\nu)}$-nek és így M_ε-nek is volnának mégis pontjai e testek felületén vagy rajtuk kivül, úgyhogy ily testek nem létezhetnek.

M_ε-nek egy közös pontja sincs M-mel, mert az $E^{(\nu)}$ utak mind az F_ν testen kívül vannak. Kicsiny ε' mellett tehát bármely két $P_\nu, P_{\nu+1}$ pont egy I_ν Jordan-görbével köthető össze a H-ban az M érintése nélkül. Az $(I_0, I_1, \ldots I_{n-1})$ görbéből kiválasztható egy I Jordan-görbe, mely a P, Q pontokat köti össze.

Ebből az is következik, hogy ha bármely I Jordan-görbe, mely a H-nak két P, Q pontját köti össze, tartalmazza egy H-beli zárt M halmaznak legalább egy pontját, akkor M átfogja a P, Q-hoz tartozó bármely (b, k) poligont. Mert ha át nem fogná, létezne egy összekötő I Jordan-görbe az M-en kivül. Ugyanekkor az M-hez tartozó F_ν test kicsiny ε mellett nem metszi és átfogja a (b, k)-t. Található tehát benne (3. §. 4.) egy végesszámú egyenesből álló H' zárt poligon, mely szintén átfogja a (b, k)-t. Ha H' az F_ν-beli gömbök közül egy R_0 pont körül irt gömbből kiindulva, az R_1, azután az R_2 stb. pont gömbjébe ér, akkor az ε-nál kisebb hosszúságú $\lambda_\nu \equiv (R_\nu, R_{\nu+1})$ egyenesdarabokból álló zárt $H \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ poligon, mely

az $R_0, R_1, \ldots R_n \equiv R_0$ pontokon halad végig, szintén átfogja a (b, k)-t, mert a Π' a Π-be deformálható az F_y belsejében.

12. §.

A PQ pontokat összekötő (b, k) zárt poligonhoz található egy H-beli zárt J Jordan-görbe, mely a (b, k)-t átfogja és egy P körül írt kicsiny ε sugarú G_ε gömb belsejébe zárható.

Legyen ε oly kicsiny, hogy Q a G_ε gömbön kívül van. P körül az ε_1 és ε_2 sugarakkal $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon)$ is írunk egy-egy G_{ε_1} és G_{ε_2} gömböt. H-nak azon pontjai, melyek a G_{ε_1} és G_{ε_2} felületén vagy e két gömb közt levő térben vannak, egy zárt M halmazt alkotnak, melyet a (b, k) poligon átfog. Mert ha a PQ pontokat bármily I Jordan-görbével kötjük össze a H-ban, ez mint összefüggő halmaz áthalad a G_{ε_1} és G_{ε_2} közti téren és így tartalmazza az M-nek is bizonyos pontjait. Legyen δ oly kicsiny, hogy egy δ sugarú gömb, ha csak egy pontját is tartalmazza az M-nek, a (b, k) poligont és a G_ε gömböt egy pontban sem metszi. ε' megválasztható oly kicsinynek, hogy a H bármely két pontja, ha távolságuk ε'-nél kisebb, egy δ sugarú gömbbe zárható Jordan-görbével köthető össze. Az M pontjaiból kiválaszthatók oly $R_0, R_1, \ldots R_n \equiv R_0$ pontok, amelyeknek a zárt $\Pi \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ poligonja a (b, k)-t átfogja és két-két szomszédos $R_\nu R_{\nu+1}$ pont egy δ sugarú G_ν belsejében egy I_ν Jordan-görbével köthető össze, mert távolságuk kisebb lehet ε'-nél. A G_ν belsejében van a λ_ν is, úgy, hogy minden G_ν-ben, tehát a (b, k) poligon és a G_ε gömb érintése nélkül, lehet a λ_ν-t végpontjainak fix helyzete mellett I_ν-be deformálni. Ezáltal a Π poligont az $J' \equiv (I_0, I_1, I_2, \ldots I_{n-1})$ zárt görbébe deformálhatjuk, mely a Π-hez hasonlóan szintén átfogja a (b, k)-t és a G_ε belsejében van.

J'-ből egy zárt J Jordan-görbét választunk ki, mely szintén átfogja a (b, k)-t.

Egy j' kört n egyenlő részre osztunk az $r_0, r_1, r_2, \ldots r_n \equiv r_0$ pontokkal és a közbeeső $i_\nu \equiv (r_\nu\, r_{\nu+1})$ íveire képezzük le az I_ν

görbéket úgy, hogy egy-egy R_v-nek az r_v pont felel meg. Így J' a j' körnek egyértékű és folytonos képe. Két pontot a j'-ben ismét összeesőnek nevezzünk, ha J'-beli megfelelő pontjaik azonosak. A j'-ben és ennek megfelelően az J'-ben az

$$(r_0, r_1, r_2, \ldots) \quad \text{és} \quad (R_0, R_1, R_2, \ldots)$$

pontok irányában egy körüljárási irányt választunk és ha c, d két j'-beli pont, a $(c\ d)$ ív alatt j'-nek azon ívét értjük, melyen ez irányban lehet a c-ből a d-be jutni. Hasonlóan J'-nek a megfelelő C, D pontok által meghatározott ívei közül (CD)-vel jelöljük azt, mely a (cd)-nek felel meg. A kiegészítő ívek (dc) és (DC).

Ha c, d egy összeeső pontpár a j'-ben, akkor meglehet, hogy a megfelelő J'-beli (CD) és (DC) ívek mindegyike, mint zárt görbe, átfogja a (bk)-t, Ezen $J^{(1)}$ és $J^{(2)}$ görbék mindegyikén esetleg ismét akad az előbbi C, D-hez hasonló pontpár, úgy, hogy a származó $J^{(11)}$, $J^{(12)}$, $J^{(21)}$, $J^{(22)}$ zárt görbék mindegyike ismét átfogja a (b, k)-t.

Ezen

$$J'; \ J^{(1)}, \ J^{(2)}; \ J^{(11)}, \ J^{(12)}, \ J^{(21)}, \ J^{(22)}; \ J^{(111)}, \ldots$$

sorozat azonban nem folytatódhatik vég nélkül úgy, hogy bármely görbe e sorozatból átfogná a (b, k)-t és belőle egy C, D-hez hasonló pontpárral ismét támadna két görbe, melyek szintén a sorozat tagjai és átfogják a (b, k)-t. Mert legalább egy

$$J', \ J^{(1)}, \ J^{(11)}, \ J^{(111)}, \ldots\text{-féle}$$

olyan sorozat létezik az előbbi sorozatban, amelynek görbéi fokozatosan egymásból származnak és kiterjedésök 0-ig csökken. Egy ily sorozat torlódási pontja a (bk) poligon pontja volna (5. §.), ami nem lehetséges.

El kell jutnunk tehát az előbbi sorozatban egy oly J'' zárt görbéig, amely szintén átfogja a (b, k)-t, de úgy, hogy ha van rajta egy C, D pontpár, amely egy j'-beli összeeső pontpárnak felel meg, akkor a J''-beli (CD) és (DC) ívek, mint zárt görbék közül legalább az egyik át nem fogja a (b, k)-t. Ugyanekkor

azután a másik átfogja, mert ha mindkettő át nem fogná, mindkettő külön-külön a $C \equiv D$ közös pontba volna összehúzható ennek fix helyzete mellett a (b, k) érintése nélkül (7. §.) úgy, hogy így maga J'' is egy pontba volna összehúzható, azaz át nem fogná (b, k)-t. J''-t jelöljük ismét J'-vel, az eredeti $I_0, I_1, \ldots$-ből benne maradt görbedarabokat $I_0, I_1, \ldots$-el, végpontjaikat $R_0, R_1, \ldots$-el és számukat n-el. J' ismét a j' kör képének tekinthető az előbbi értelemben.

A j' kör i_0 ívén legyen M mindazon m_1' pontok halmaza, amelyeknek a többi $i_1, i_2, \ldots i_{n-1}$ ívekben egy-egy oly n_1' összeeső ponttársa van, hogy az $(m_1'n_1')$ ívnek megfelelő zárt görbe a (b, k)-t át nem fogja. Ha átfogja, akkor egy ily m_1' nem tartozik az M-be.

Ezen M halmaznak van egy legalsó (azaz r_0-hoz legközelebb levő) m_1 pontja. Mert legyen $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \ldots$ egy oly sorozat az M-ben, mely M-nek a legalsó torlódási pontja felé tart, melyet m_1-el jelölünk. Feltehető, hogy a $\mu_1, \mu_2, \ldots$ pontoknak az n_1' pontok közt levő megfelelő $\nu_1, \nu_2, \ldots$ pontjai egyetlen n_1 pontban torlódnak, mert a $\mu_1, \mu_2, \ldots$ közül kiválasztható ilyen sorozat. m_1 és n_1 összeeső pontok és az (m_1n_1) ív görbéje az összes $(m_1'n_1')$ ívek görbéihez hasonlóan szintén át nem fogja a (b, k)-t. Mert ha $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \ldots$, vagy legalább a ν pontok közül kiválasztható ily sorozat, akkor elég nagy ρ mellett az $(m_1\mu_\rho)$ és $(\nu_\rho n_1)$ ívek zárt görbéje egy kicsiny gömb belsejében a (b, k) érintése nélkül a μ_ρ és ν_ρ pontok közös megfelelő pontjába húzható össze ezen pont fix helyzete mellett, úgy, hogy ezáltal az (m_1n_1) ív görbéje az $(\mu_\rho\nu_\rho)$ ív görbéjébe deformálódik, s mivel ez utóbbi át nem fogja, azért az első sem fogja át a (b, k)-t.

Ha pedig $\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 \ldots$, vagy a ν pontok közül csak ilyen sorozat választható ki, akkor elég nagy ρ mellett ismét egy kicsiny gömb belsejében a (b, k) érintése nélkül deformálható az $(m_1\mu_\rho)$ ív nyilt görbéje a végpontok fix helyzete mellett $(n_1\nu_\rho)$ görbéjébe.

Ezáltal az (m_1n_1) ív görbéjébe ismét a $(\mu_\rho\nu_\rho)$ ív görbéjébe deformálódik és így át nem fogja a (b, k)-t.

Jelentse n_1 az m_1-el ily módon összeeső, véges számú n_1

pont közül a legutolsót. Kicsiny δ és ε' mellett az n_1 nem lehet azonos r_0-al. Ha az i_0 ívben az M halmaznak egy pontja sincs, akkor m_1 az r_1-el legyen azonos és n_1 az m_1-el összeeső mindazon n_1' pontok közül a legmagasabb, melyek mellett az $(m_1 n_1')$ ív görbéje át nem fogja a (b, k) t. Ha egy ily n_1' pont sem létezik, akkor n_1 is az r_1-el legyen azonos.

Az n_1 utáni legelső, n_1-től különböző osztáspont legyen r_ν. Mindazon m_2' pontok halmaza az $(n_1 r_\nu)$ ívben, melyeknek van egy-egy n_2' összeeső ponttársuk j'-nek a $(n_1 r)$ íven kívül levő részében (leszámítva e külső részből az $(m_1 n_1)$ ív belső pontjait), bír hasonlóan egy legalsó m_2 ponttal, mely n_1-től különböző, de r_ν-vel azonos is lehet, — ha csak azon m_2', n_2' pontpárokat számítjuk is, amelyek $(m_2' n_2')$ ívének görbéje át nem fogja a (b, k)-t. Az m_2-vel összeeső n_2'-féle pontok közül az utolsó legyen n_2, mely r_ν-vel is lehet azonos, ha m_2 is az. Az $(m_2 n_2)$ ív görbéje szintén át nem fogja a (b, k)-t.

Ha r_ϱ az n_2 utáni legelső, tőle különböző osztáspont, akkor az $(n_2 r_\varrho)$ ívben és azután is úgy folytatjuk ezen eljárást, mint előbb az $(n_1 r_\nu)$ ívben és úgy, hogy az egyszer már kijelölt $(m_1 n_1)$, $(m_2 n_2)$, ... ívek belső pontjait nem vesszük többé tekintetbe a pontok összeesésénél. Megeshetik, hogy ezen ívek közül valamelyik egy előtte levőt egészen magába zár. Ekkor az utóbbit nem tartjuk számon külön többé.

Végesszámú lépés után a j' fennmaradó

$$(n_1 n_2),\ (n_2 n_3),\ \ldots\ (n_s n_1)$$

íveinek megfelelő pontok együtt egy zárt J görbét adnak, mert két-két szomszédos ív egymás felé eső végpontjai összeeső pontok. J is átfogja a (bk)-t, mert ha az

$$(m_1 n_1),\ (m_2 n_2),\ \ldots\ (m_s n_s)$$

ívek görbéit, mint át nem fogó görbéket egyenként az egyes ívek összeeső végpontjainak megfelelő J'-beli pontba húzzuk össze, ezáltal az átfogó J' görbét az J-be deformáljuk és e deformáczió a (b, k) érintése nélkül történhetik. J-ben továbbá nem

létezhetnek összeeső pontok. Egy összeeső c, d pontpárnak mindkét pontja nem lehet az

$$(n_1 m_2),\ (n_2 m_3),\ \ldots\ (n_s m_1)$$

íveknek csupán egyikében, mert ezen íveknek megfelelő J'-beli pontok az $I_0, I_1, \ldots I_{n-1}$, Jordan-görbék egyes darabjai. A c, d összeeső pontpár ezen ívek közül csak két különbözőben lehetne, anélkül, hogy az

$$m_1,\ n_1;\ m_2,\ n_2;\ \ldots\ m_s,\ n_s$$

pontpárok közül való volna. Ez pedig ezen pontpárok tulajdonságai miatt szintén nem lehetséges, mert a (cd) és (dc) ívek görbéi közül az egyik, pl. a (cd) át nem fogná a (b, k)-t és (cd) belsejében kellene lennie ezen pontpárok ívei közül legalább egy $(m_\nu n_\nu)$ ívnek. Ha a (cd)-ben levő ily ívek közül $(m_\nu n_\nu)$ a legelsőt jelenti, az m_ν és n_ν pontok közül legalább egy a (cd) ív belső pontjai közül való lenne, azaz nem m_ν és n_ν lennének az m_ν' és n_ν' ponthalmazok szélső határpontjai.

J tehát zárt Jordan-görbe.

Később kimutatjuk, hogy ha egy H-beli zárt J Jordan-görbe egy (b, k) poligont átfog, akkor viszont ez is átfogja az J-t.

13. §.

Minden H-beli zárt J Jordan-görbe a H-nak rajta kívül levő pontjait két részre, H_1 és H_2-re osztja, úgy, hogy a H_1 (vagy H_2) bármely két pontja az J érintése nélkül köthető össze egy H-beli Jordan-görbével, míg bármely Jordan-görbe, mely H_1-nek egy pontját a H_2 egy pontjával köti össze a H-ban tartalmazza az J-nek legalább egy pontját.

A H-nak két J-n kívüli P, Q pontját az J-től el nem választottnak tekintjük, ha összeköthetők az J érintése nélkül egy H-beli Jordan-görbével; ellenkező esetben az J elválasztja a P, Q pontokat. Hasonlóan értjük az elválasztást bármely más H-beli halmazra is. A H mindazon pontjainak halmazát, melyeket az J egy rajta kívül levő R ponttól el nem választ,

$H(R)$-el jelöljük. A H-nak az R elegendő kis környezetében levő valamennyi pontja a $H(R)$-be tartozik. $H(R)$ határának nevezzük és $J(R)$-el jelöljük az J mindazon pontjainak halmazát, melyek egy $H(R)$-beli R', R'', ... pontsorozatnak a torlódási pontjai.

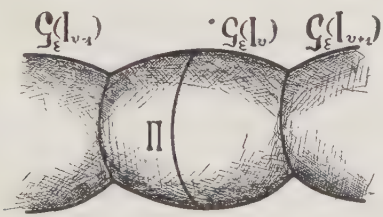
$J(R)$ zárt halmaz. Ha J elválasztja a P, Q pontokat, minden e két pontot összekötő H-beli JORDAN-görbe az $J(P)$ és $J(Q)$-ból is tartalmaz pontokat, tehát ezek is elválasztják P és Q-t.

1. *A H-nak bármely I nyilt* JORDAN-*görbéje gömbtipusú $G_\varepsilon(I)$ poliedrális felülettel közelíthető meg,* Azaz minden $F_\varepsilon(I)$ közelitő felület szétmetszésekkel gömbtipusúvá változtatható. Kicsiny deformációkkal elérhető, hogy $F_\varepsilon(I)$-nek többszörös pontjai és vonalai nincsenek. Ha $F_\varepsilon(I)$ összefüggési rendszáma a gömbénél magasabb, akkor létezik rajta egy Π zárt poligon, amelyen át az $F_\varepsilon(I)$ belsejében egy L lap fektethető át úgy, hogy ennek mentén való felmetszéssel az összefüggési rendszám egygyel alacsonyabb lesz.

E Π át nem foghatja az I-t. Mert I önmagában egy ponttá húzható össze; tehát a H-nak egy rajta kivül levő pontpárját sem választhatja el (11. §. 4.). H-nek a H-val közös pontjai egy zárt M halmazt alkotnak. Az M-en kivül levő iveit H-nek jelöljük a_1, a_2, ...-vel. Ezeknek kiterjedése 0-ig csökken, úgyhogy végpontjaik: P_1, Q_1, P_2, Q_2, ... az I-t nem érintő és 0-ig csökkenő kiterjedésű I_1, I_2, ... JORDAN-görbékkel köthetők össze a H-ban. Az a_1, a_2, ... ivek 0-ig csökkenő sugarú gömbök belsejében deformálhatók végpontjaik fix helyzete mellett egyenként az I érintése nélkül az I_1, I_2, ... görbékbe. Ezáltal a Π poligon egy H-beli J' zárt görbébe deformálódik, mely az M halmaz pontjaiból és az I_1, I_2, ... görbékből áll. J' az I érintése nélkül húzható össze a B vagy K egy pontjába, tehát vele együtt Π sem fogja át I-t.

A H-n át az $F_\varepsilon(I)$ belsejében tehát egy I-t nem metsző L_1 lap is fektethető és ennek mentén való szétmetszéssel az $F_\varepsilon(I)$ összefüggési rendszáma egygyel csökken. Végesszámú ismétlés után $F_\varepsilon(I)$ gömbtipusú $G_\varepsilon(I)$-vé válik.

2. *Az J zárt* Jordan-*görbe a H-t legalább két részre választja szét.* J-t az $R_0, R_1, \ldots R_n \equiv R_0$ pontokkal az $I_\nu \equiv (R_\nu, R_{\nu+1})$ nyilt Jordan-görbékre osztjuk fel. Kicsiny ε mellett a $G_\varepsilon(I_\nu)$ összes felületek közül, két-két szomszédost kivéve, bármely kettő egymáson kívül van. A $G_\varepsilon(I_\nu)$ testek láncát az J egyszer járja körül, azaz elég nagy ρ mellett az J-n választott $P'_0, P'_1, \ldots P'_\varrho \equiv P'_0$ pontok által meghatározott $\Pi' \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{\varrho-1})$, zárt poligon, ha két-két szomszédos $P'_\nu P'_{\nu+1}$ pont távolsága, λ_ν adott kicsiny szám, e láncz belsejében van és azt egyszer körüljárja. A $G_\varepsilon(I_\nu)$ felületét a $G_\varepsilon(I_{\nu-1})$ és $G_\varepsilon(I_{\nu+1})$ közt körüljáró zárt Π poligon (6. ábra) átfogja az J-t, mert ha át nem fogná, a $G_\varepsilon(I_\nu)$ testek belsejében egy L lap volna átfektethető rajta és ezt elég nagy ρ mellett a Π' poligon sem metszené, úgyhogy körül nem



6. ábra.

járná a láncz belsejét. Jelöljük a Π-n levő H-beli pontok zárt halmazát M-el, Π nek az M-en kívüli íveit $a_1, a_2, \ldots$-vel, ezek végpontjait $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots$-vel. Ezek között kell léteznie legalább egy, J-től elválasztott pontpárnak, mert ellenkező esetben a Π az előbbihez hasonló módon egy H-beli zárt J' görbébe volna deformálható az J érintése nélkül, azáltal, hogy az a_ν íveket a $P_\nu Q_\nu$ pontpárokat összekötő és 0-ig csökkenő kiterjedésű I''_ν görbékbe deformáljuk. J' pedig egy ponttá húzható össze az J érintése nélkül.

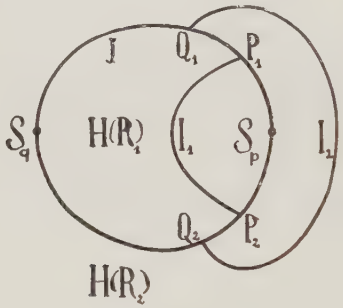
3. *Bármely $H(R)$ határa $J(R)$ azonos az egész J-vel* és azon pontjai J-nek, melyek a $H(R)$ egy pontjából egy $H(R)$-ben levő Jordan-görbével érhetők el, az J-n mindenütt sűrű halmazt alkotnak.

Mert ha I_1 az J-nek bármily kicsiny íve, R egy tőle elvá-

lasztott R' ponttal oly I' JORDAN-görbe által köthető össze, mely nem metszi az I_1 kiegészítő ívét, I_2-t, egy pontban sem, mert a nyilt H-beli JORDAN-görbe a H-nak egy pontpárját sem választja el. Mivel I'-nek az J-t metszenie kell, azért az I_1-et metszi csupán. I_1-nek az I'-n R-ből elérhető legelső pontja tehát $J(R)$-hez tartozik és R-ből egy $H(R)$-beli JORDAN-görbével érhető el.

Ha R-t az J két pontjával kötik össze ily görbékkel, ezekből kiválasztható egy JORDAN-görbe, mely a két pontot a $H(R)$ belsejében köti össze.

4. *Az J legfeljebb két részre osztja a H-t.* Azaz ha R_1, R_2, ... oly ponthalmaz a H-ban, amelynek bármely két pontját az J



7. ábra.

elválasztja és a H-nak J-n kívüli bármely pontja a $H(R_1)$, $H(R_2)$, ... halmazok egyikében előfordul, akkor e halmazok száma legfeljebb kettő lehet. Legyen (P_1Q_1) és (P_2Q_2) az J-nek két egymáson kívül levő kicsiny íve. (A 7. ábrában jelentse az J-n belül levő terület a $H(R_1)$-et, a külső a $H(R_2)$-t). A $H(R_1)$-ben kössük össze a (P_1Q_1) valamely belső pontját egy I_1 görbével a (P_2Q_2) valamely belső pontjával. Hasonló legyen az I_2 görbe a $H(R_2)$-ben. Jelentse P_1, Q_1, P_2; Q_2 már ezen görbék végpontjait, úgy, hogy (P_1Q_1) és (P_2Q_2) a végpontok közé eső kicsiny ívek. Ha $H(R_1)$, $H(R_2)$-n kívül még léteznek a $H(R_3)$, $H(R_4)$, ... halmazok is, akkor az J-nek a (P_1P_2) ívén levő bármely S_p és a (Q_1Q_2) ívén levő bármely S_q pontja egy harma-

dik $H(R_3)$ halmazon áthaladó H-beli JORDAN-görbével köthető össze az $[J_1, J_2, (P_1Q_1), (P_2Q_2)]$ görbékből összeállított J_1 zárt JORDAN-görbe érintése nélkül, mert S_p és S_q tetszésszerinti közelében léteznek a $H(R_3)$-ból elérhető pontok. Az S_p és S_q pontok közvetítésével a $H(R_3)$, $H(R_4)$, ... összes belső pontjai is összeköthetők egymással az J_1 érintése nélkül, sőt a $H(R_1)$ és $H(R_2)$-nek I_1 és I_2-n kívül levő bármely R_1' és R_2' pontjaival is és ezen pontok is egymás közt. Mert R_1' az I_1 és (P_1Q_1), (P_2Q_2)-ből álló nyilt JORDAN-görbe érintése nélkül köthető össze az R_3-al egy görbe által s ezen az R_1'-ből legelsőnek elérhető J-beli pont csak a (P_1P_2) és (Q_1Q_2) ívek valamely belső pontja lehet, tehát ez ívek belsejében az S_p és S_q pontok valamelyikével köthető össze. A H-nak az J_1-n kívül levő összes pontjai tehát az J_1 érintése nélkül köthetők össze egymással, azaz nem léteznek a H-ban J_1-től elválasztott pontpárok, ami lehetetlen.

J tehát két részre, H_1 és H_2-re osztja a H-t. Ha J a H-nak két P, Q pontját el nem választja, akkor nemcsak az ezekhez tartozó (b, k) poligon át nem fogja az J-t, hanem ez sem fogja át a (b, k)-t. Mert ha mindkét pont a H_2-ben van, egy $F_\varepsilon(H_1, J)$ közelítő felületen, mely a H_1 és az J pontjaiból álló halmazt közelíti meg, kívül van a (b, k) poligon minden pontja. Feltehetjük, hogy e felületnek többszörös pontjai vagy vonalai nincsenek. E felületen levő egyetlen Π poligon sem foghatja át a H_1 és J pontjaiból álló halmazt, mert a Π csak a H_2-ből tartalmazhat pontokat, melyek egy zárt M halmazt alkotnak. H-nek minden pontja a J-től véges távolságra van, az M-en kívüli α_1, α_2, ... 0-ig csökkenő kiterjedésű ívei tehát 0-ig csökkenő sugarú gömbök belsejében az J érintése nélkül deformálhatók a végpontjaikat a H_2-ben összekötő és 0-ig csökkenő kiterjedésű I_1, I_2, ... JORDAN-görbékbe. Ezáltal Π egy H_2-beli zárt görbébe deformálódik, amely egy ponttá húzható össze az J érintése nélkül. $F_\varepsilon(H_1, J)$ tehát szétmetszésekkel gömbtipusúvá változtatható és J e gömbtipusú felület belsejében lévén, át nem fogja a (b, k) poligont. Viszont, ha J át nem fogja a (b, k)-t, ez

sem fogja át J-t. A (bk) poligon és az J görbe egyszerre átfogják, vagy át nem fogják egymást.

A H-ban választunk egy P_∞ pontot és minden H-beli zárt JORDAN-görbe belseje alatt a hozzá tartozó H_1 és H_2 részek közül azt értjük, melyben nincs a P_∞ pont. A másik rész a külső rész. Ez a definicio nem vonatkozhatik oly görbékre, melyek átmennek a P_∞ ponton.

14. §.

Ha $J_1, \ldots J_\nu$ olyan 0-ig csökkenő kiterjedésű zárt JORDAN-*görbék sorozata a H-ban, melyek át nem mennek a P_∞ ponton és nem is torlódnak benne, akkor a H hozzájuk tartozó belső részeinek kiterjedése is 0-ig csökken.*

Feltehetjük, hogy az $J_1, J_2, \ldots$ görbék a H-nak egyetlen R pontjában torlódnak. Ha a belső részek kiterjedése nem csökken 0-ig, akkor található az J_1-n belül egy P_1, az J_2-n belül egy P_2 pont. stb., úgy, hogy bármely P_ν az R-től egy véges r-nél nagyobb távolságra van.[1] Az $J_1, J_2, \ldots$ sorozatból kiválaszthatók oly görbék, amelyeknek ezen P_ν pontjai a H-nak egyetlen P pontjában torlódnak. Jelöljük ezeket és a hozzájuk tartozó P_ν pontokat ismét $J_1, J_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots$-vel. P és R távolsága nem lehet kisebb r-nél. Létezik egy elég nagy n szám, amelyen túl az összes $J_{n+1}, J_{n+2}, \ldots$ görbék az R körül írt ε sugarú G_ε gömbön belül és $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ a P körül írt ε sugarú G_ε gömbön belül vannak, továbbá a $(P_{n+1}P), (P_{n+2}P), \ldots$ pontpárok a G_ε belsejében köthetők össze a $(\beta_1\varkappa_1), (\beta_2\varkappa_2), \ldots$ 0-ig csökkenő kiterjedésű zárt poligonokkal. Kicsiny ε mellett a G_ε és G_r gömbök egymáson kívül vannak. A $(\beta_\nu\varkappa_\nu)$ poligonok egyike sem foghatja át a megfelelő J_{n+1} görbét, mert gömbfelület választja el őket. P tehát valamennyi $J_{n+1}, J_{n+2}, \ldots$ görbén belül van, azaz ezen görbék bármelyike

[1] Vagy legalább is kiválaszthatók ily görbék az eredeti sorozatból. A kiválasztott görbéket ekkor ismét $J_1, J_2, \ldots$-vel jelöljük.

és a H-nak P, P_∞ pontjaihoz tartozó (b, k) poligon kölcsönösen átfogják egymást, úgy, hogy az J_r görbék torlódáspontja R is a (b, k) poligonon van (5. §.). Ez azonban nem lehetséges, mert R a P_∞-től és P-től különböző pont, a (b, k) poligon pedig H-nak csupán ezen két pontját tartalmazza.

Tételünk érvényes marad, ha P_∞-t a H más pontjába helyezzük is át. Tehát *bármily kicsiny δ-hoz található oly kicsiny ε, hogy minden H-beli zárt* Jordan*-görbe, mely egy ε sugarú gömbbe zárható, belsejével együtt egy δ sugarú gömbbe zárható be,* — ha általánosabb értelemben a P_∞ körül bizonyos kicsiny ε_1 sugárral írott gömb belsejében levő zárt Jordan-görbék belseje alatt a H-nak hozzájuk tartozó H_1 és H_2 része közül azt értjük, mely nem a P_∞-re, hanem egy ezen gömbön kívül levő P'_∞-re nézve belső rész.

Közönségesen azonban az összes, P_∞-en kívüli görbék belső és külső részét csak a P_∞-re vonatkoztatjuk.

15. §.

Ha két H-beli zárt Jordan-görbének, J és J_1-nek egy közös pontja sincs, akkor közülük bármelyik a másiknak egészen a belsejébe vagy külsejébe esik. (Feltesszük itt is, ezután is, hogy P_∞ nincs a görbék egyikén sem.) Ha J_1 az J-n belül van, akkor viszont J az J_1 külső részébe esik. Mert a P_∞-t az J_1 valamely R pontjával egy I görbével kössük össze, mely egészen az J_1 külső részében van. R az J-n belül, P_∞ rajta kívül van, tehát I legaláb egy pontban metszi az J-t, ami lehetetlen volna, ha J az J_1 belsejében lenne.

Ha J_1 az J belsejében van, akkor J_1 minden belső pontja belső pontja J-nek is. Mert ha J_1-nek egy belső P pontja az I-n kívül volna, P-t össze lehetne kötni az J valamely R pontjával egy oly I görbével, mely egészen J külső részébe esik. J_1-re nézve azonban P belső és R külső pont. Az I tehát metszené az J_1-et, ami lehetetlen, mert J_1 minden pontja az J-re nézve belső pont.

Ha az J-nek két R, R' pontját az J belsejében egy I_0 Jordan-görbével kötjük össze és I_1, I_2 az J-nek az R, R' pontok által meghatározott íveit jelentik, akkor J-nek minden belső S pontja belső pontja az $J_1 \equiv (I_0 I_1)$ és $J_2 \equiv (I_0 I_2)$ zárt Jordan-görbék egyikének. Mert ha az S és P_∞ pontokhoz tartozó (b, k) poligon az J_1, J_2 görbék egyikét sem fogná át, ezek egy-egy gömbtipusú felülettel volnának elkülöníthetők tőle és ezek belsejében J_1 és J_2 is, végpontjainak fix helyzete mellett, az I_0-ba volna deformálható, amely önmagában egy ponttá húzható össze, azaz J sem fogná át (b, k)-t.

I_1 minden belső pontja az J_2-n kívül, s hasonlóan I_2 minden belső pontja az J_1-en kívül van. Ha I_1-nek egy V belső pontja az J_2-n belül volna, ugyanitt volna bármely más belső X pontja is, mert e két pont I_1 nek a (VX) ívével köthető össze az J_2 érintése nélkül. Azaz ekkor I_1 egészen az J_2-n belül volna és P_∞ össze volna köthető az I_0 valamely R_0 pontjával egy I görbével, mely egészen az J_2-n kívül van. J-re nézve P_∞ külső, R_0 belső pont, I tehát metszené J-t, s mivel ennek J_2-n belül levő I_1 ívét nem metszheti, az I_2-t metszené, ami nem lehetséges, mert I az J_2-nek egyedül az R_0 pontját tartalmazza.

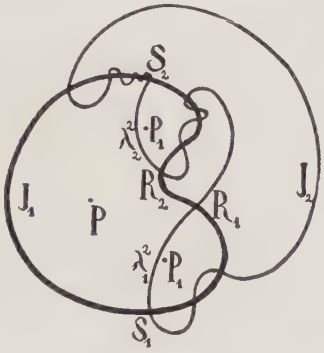
Az J_1 és J_2 görbék bármely belső pontja belső pontja J-nek is. Mert ha J_1-nek egy belső P pontja az J-n kívül volna, össze volna köthető az I_2 valamely R_2 pontjával oly I görbével, mely egészen az J-n kívül van. J_1-re nézve P belső és R_2 külső pont, I tehát metszené az J_1-et s mivel ennek az J hez tartozó I_1 ívét nem metszheti, az I_0-t metszené. Ennek azonban minden pontja J-n belül van.

J_1 és J_2-nek közös belső pontja sem lehet. J_1-nek az I_1 egy belső R_1 pontja elegendő közelében mindenesetre van egy P_1 belső pontja, mely az J_2-n kívül van, mert maga R_1 is külső pont J_2-re nézve. J_1 bármely más P belső pontját kössük az J_1 belsejében a P_1 ponttal egy I görbével. I nem metszi J_2-nek J_1-el közös I_0 ívét és az J_1-en kívül levő I_2 ívét sem, azaz az egész J_2-t sem, úgy, hogy P is J_2-n kívül van.

Hasonló tételek érvényesek az J külső részére is.

Mindazon törvények tehát, melyek a gömbfelületen a véges számú polygonvonalból vagy Jordan*-görbéből álló hálózatokra és a hálózat által létesített területekre érvényesek, a H-ban is teljesülnek.*

Ha J_1 és J_2 két tetszésszerinti zárt Jordan-görbe a H-ban, akkor a H mindazon pontjainak határhalmaza, melyek a H-nak egy J_1 és J_2-n nem levő P pontjával az J_1 és J_2 érintése nélkül köthetők össze egy Jordan-görbével a H-ban, egy zárt Jordan-görbe, melynek pontjai az J_1 és J_2 pontjai közül valók. Legyen



8. ábra.

P az J_1-n belül. J_2-nek bármely $\lambda_\nu^{(2)}$ íve, mely az J_1-en belül van, $R_\nu S_\nu$ végpontjaival az J_1-nek két ívét határozza meg s ezek közül azt, mely a P-ből az J_2 metszése nélkül el nem érhető, jelentse $\lambda_\nu^{(1)}$. A $\lambda_\nu^{(1)}$-k általában egymást átfedik s bármelyik egy másikon vagy egészen belül, vagy kívül van. Ezen 0-ig csökkenő $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots$ sorozatban hagyjuk el mindazon íveket, melyek egy másikon belül vannak. Bármelyik csak véges számú ívnek a belsejében lehet. A megmaradtak mind egymáson kívül vannak, vagy csak egy pontban érintkeznek. Jelöljük ezeket ismét $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots$-el, a hozzájuk tartozó $\lambda^{(2)}$-ket $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots$-vel és végpontjaikat $R_1S_1, R_2S_2, \ldots$-vel (8. ábra). Ha az J_1 belső pontjaiból az $J^{(1)} \equiv (\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)})$, $J^{(2)} \equiv (\lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)}), \ldots$ egymáson kívül levő és 0-ig csökkenő kiterjedésű zárt Jordan-görbék belső

pontjait elhagyjuk, J_1 belsejének bármely megmaradt P' pontja, mely nincs az J_2-n, azon J_p JORDAN-görbén belül van, melyet az J_1-ből úgy nyerünk, ha ennek a $\lambda_\nu^{(1)}$ íveit a megfelelő $\lambda_\nu^{(2)}$ ívekkel helyettesítjük. Mert a $P'P_\infty$ pontokhoz tartozó (b, k) poligon érintése nélkül deformálhatók 0-ig csökkenő gömbtipusú testek belsejében a $\lambda_\nu^{(1)}$ ívek a $\lambda_\nu^{(2)}$ ívekbe végpontjaik fix helyzete mellett, úgyhogy J_1-el együtt J_p is átfogja a (bk) poligont. Hasonlóan J_p bármely belső pontja az J_1-n is belül van és J_p-nek nem lehet közös belső pontja az $J^{(\nu)}$ görbék egyikével sem. A P-ből az J_1 és J_2 érintése nélkül elérhető pontok halmazának a határgörbéje tehát J_p és két JORDAN-görbe hálózata a H-nak rajta kívül levő pontjait oly «területekre» osztja, amelyeknek a kölcsönös elérhetőségi viszonyai ép olyanok, mint egy hasonló hálózatnál egy gömbfelületen. Mert az $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, ... belsejében a $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, ... ívekhez elegendö közel választott P_1, P_2, ... pontokkal hasonló módon ezen görbék belsejében határozhatjuk meg a $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, ... íveket, azaz a P_1, P_2, ... felől elérhető H-beli területeket, ezeken kívül ismét vég nélkül, míg az összes területek kiterjedése 0-ig nem csökken. Ugyanez végezhető az J_1-n kívül is.

Ha egy harmadik zárt JORDAN-görbét is számba veszünk a felületen, ez az előbbi két görbe hálózata által létesített területek mindegyikében és így az egész H-ban is olyan további területeket metsz ki, melyek kölcsönös elérhetőségi viszonyai hasonlók a gömbfelületen levő hasonló hálózatéhoz. Ugyanez áll véges számú JORDAN-görbére is.

Az eddigiekből az is következik, hogy egy zárt J_1 JORDAN-görbe mindazon pontjai, melyek a belsejéből (vagy külsejéből) egy JORDAN-görbével elérhetők, nemcsak mindenütt sürü halmazt alkotnak, hanem e halmaz azonos az egész görbével. Legyen R az J_1 bármely pontja. R körül egy kicsiny ε sugarú gömbbe zárható J_2 szerkeszthető, mely az R és P pontokat — ha P az J_1 egy belső pontja — elválasztja (12. §.). R a P által meghatározott $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, ... ívek valamelyikén lehet csupán, mert ha az J_p-n lenne, ennek a belső P pontjából egy JORDAN-

görbével volna elérhető, mely egészen az J_p belsejében van és így nem metszi J_2-t sem, holott ez elválasztja a két pontot. Létezik tehát egy $\lambda_\varrho^{(2)}$ ív, mely a $\lambda_\varrho^{(1)}$-n levő R-t a P-től elválasztja. Tehát az R körül írt és 0-ig csökkenő ε_ν sugarú G_{ε_1}, G_{ε_2}, ... gömbök mindegyikében található egy-egy λ_1, λ_2, ... ív az J_1 belsejében, mely az R-t P-től elválasztja. Ezen ívek végpontjai legyenek P_1Q_1, P_2Q_2, ... és J_1-nek a közéjök eső kicsiny ívei λ_1', λ_2', ... Feltehető, hogy ezen ívek fokozatosan egymáson belül vannak. Mindegyiken létezik egy-egy, P felől elérhető K_ν belső pont. A P és K_ν pontokat összekötő l_ν görbe metszi a λ_ν-t és az előtte levő összes λ_ϱ íveket. Ha tehát a P felől az l_1-n haladunk a λ_1-ig, azután ezen az l_2-ig, ez utóbbin a λ_3-ig, stb., a bejárt folytonos görbéből kiválasztható egy JORDAN-görbe, mely az R és P pontokat köti össze az J_1 belsejében.

16. §.

A H halmaz egy G gömb felületére kölcsönös egyértékű és folytonos módon leképezhető.

A H minden P pontja körül létezik egy $\varepsilon^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható zárt JORDAN-görbe, mely e pontot a P_∞-től elválasztja. P_∞ körül külön írunk egy $\varepsilon^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható zárt JORDAN-görbét s ezen görbe belsejének a P_∞-felőli oldalát nevezzük. Mivel bármely P elegendő kis környezetében csak olyan H-beli pontok léteznek, melyeket e P-től a hozzátartozó JORDAN-görbe nem választ el, azért BOREL tétele szerint kiválasztható e JORDAN-görbék közül véges számú $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, \ldots J_n^{(1)}$ görbe úgy, hogy a H bármely pontja ezek közül legalább egynek a belsejében van.

Kicsiny $\varepsilon^{(1)}$ mellett e görbék mindegyike a belsejével együtt egy adott kicsiny $\delta^{(1)}$ sugarú gömb belsejébe zárható.

A H leképezését egy G gömbre úgy végezzük, hogy előbb ezen $J_\nu^{(1)}$ JORDAN-görbék hálózatát képezzük le a G-re.

$J_1^{(1)}$-t a G-nek egy $j_1^{(1)}$ zárt és többszörös pontok nélküli po-

ligonjára képezzük le. E poligon egyik oldalát vesszük a belseje gyanánt.

$J_1^{(1)}$ egy belső és $J_2^{(1)}$-n kivüli P pontja (9. ábra) meghatározza az egymást nem metsző $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$, ... íveket az $J_2^{(1)}$-n. Hasonló 0-ig csökkenő kiterjedésü és egymáson kivül levő poligoníveket húzunk a $j_1^{(1)}$ belsejében a megfelelő végpontok közt és ezekre képezzük le a $\lambda^{(2)}$ íveket. Azután a $P_1, P_2, \ldots$ pontokból (9. ábra) elérhető $J_2^{(1)}$-beli íveket s hasonlóan a továbbiakat és az $J_1^{(1)}$-en kivül levőket is a G-n megfelelően húzott poligonívekre képezzük le. Az $J_1^{(1)}$ és $J_2^{(1)}$ görbék $J_{12}^{(1)}$ hálózatának ily módon egy $j_{12}^{(1)}$ hálózat felel meg s ezek egymásnak kölcsönös egyértékü és folytonos módon felelnek meg. Az $J_{12}^{(1)}$ által meghatározott H-beli területek mindegyikének egy-egy G-beli terület felel meg, egymásnak kölcsönös egyértékü és folytonos módon megfelelő határvonalakkal. Továbbá 0-ig csökkenő kiterjedésü $J_{12}^{(1)}$-beli görbéknek és általa meghatározott területeknek hasonló görbék és területek felelnek meg a G-n és pedig egymáson kivül levő területeknek egymáson kivül levő területek. E viszony kölcsönös. Azonkivül egy H-beli területsorozat torlódási pontjai az $J_{12}^{(1)}$-en a megfelelő területek torlódási pontjainak felelnek meg.

Ha ezután az $J_{12}^{(1)}$ hálózat minden területében levő $J_3^{(1)}$-beli íveket képezzük le a G-beli megfelelő területekben hasonló módon húzott ívekre, akkor az $J_{123}^{(1)}$ és $j_{123}^{(1)}$ hálózatok és a többi görbék bevonásával nyert hálózatok is birnak mindazon tulajdonságokkal, melyekkel J_{12}^{12} és $j_{12}^{(1)}$. A $J_{12\ldots n}^{1)}$ és $j_{12\ldots n}^{(1)}$ hálózatokat $J^{(1)}$- és $j^{(1)}$-el jelöljük. Az $J^{(1)}$ hálózat minden területe, mint valamelyik $J_\nu^{(1)}$ görbe belsejének egy része, a határával együtt egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható. Ugyanez azonban nem áll esetleg a $j^{(1)}$ hálózatra is a G-n. De mindenesetre a $j^{(1)}$ hálózat mindazon területei, melyek nem zárhatók egy δ^1 sugarú gömb belsejébe, egy belsejükben húzott i poligonvonallal, mely a terület határpoligonjának két pontját köti össze a terület belsejében, úgy oszthatók két új területre s az új területek is, ha szükséges, úgy oszthatók szét egy-egy i_1 és i_2 poligonvonal-

lal s az új területek is, ha szükséges, az i_{11}, i_{12}, i_{21} i_{22} poligonvonalakkal stb., hogy véges számú lépés után az osztás után fenmaradt területek mindegyike egy-egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömbbe zárható. A $j^{(1)}$ hálózat minden szétosztott területének megfelelő H-beli területek mindegyikét a megfelelő pontok közt húzott I görbével két részre osztjuk s I-t az i-re képezzük le. Az új területeket, ha G-beli megfelelő területeik még szét vannak osztva, az l_1, l_2 görbékkel szétosztjuk és ezeket az i_1, i_2-re képezzük le, stb. Mindez elvégezhető, mert az $J^{(1)}$ és minden tovább nyert hálózat bármely területének határvonala egy-egy zárt Jordan-görbe, ennek pedig minden pontja az összes belső pontokból elérhető. Bármiképp is történt a megfelelő területek belsejében a H-ban ezen új szétosztás, a véges számú lépés után nyert új hálózat is azzal a tulajdonsággal bir, hogy minden területe egy $\delta^{(1)}$ sugarú gömb belsejébe zárható. E tulajdonsága megvan az új G-beli hálózatnak is, amellett, hogy mindkét hálózat az eredeti $J^{(1)}$ és $j^{(1)}$ hálózatok többi tulajdonságait is birja. Az új hálózatokat ismét $J^{(1)}$ és $j^{(1)}$-el jelöljük.

Ha a H-ban az eddigihez hasonló módon olyan, belsejükkel együtt egy-egy $\delta^{(2)}$ sugarú gömbbe zárható zárt Jordan-görbéket határozunk meg véges számban, hogy a H minden pontja ezek legalább egyikének belső pontja, az $J^{(1)}$ hálózatot ezen görbék fokozatos bevonása által oly $J^{(2)}$ hálózattá egészithetjük ki s ezt egy G-beli $j^{(2)}$ hálózatra úgy képezhetjük le, hogy, esetleg csak az előbbihez hasonló szétosztással való módosítás után, ezen hálózatok is birnak a $J^{(1)}$ és $j^{(1)}$ hálózatok minden tulajdonságával, de területeik $\delta^{(2)}$ sugarú gömbökbe zárhatók.

Ezt vég nélkül folytatjuk 0-ig csökkenő $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, ... számokkal. Az $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, ... hálózatok minden oly T_1, T_2 ... területsorozata, melynél T_ν az $J^{(\nu)}$ hálózat egy területe és $T_{\nu+1}$ a T_ν-n belül van, egyetlen R torlódási ponttal bir a H-ban. Ezen R-hez rendeljük a G-beli megfelelő t_1, t_2, ... hasonló területsorozat egyetlen r torlódási pontját.

A leképezés a H és a G pontjai közt így kölcsönösen egyértékű. Egy G-beli pontnak nem felelhet meg két különböző

pont a H-ban, mert elég nagy ν mellett e két pont az $J^{(\nu)}$ hálózat két különböző területének belső vagy határpontja; ezeknek pedig különböző területek felelnek meg a G-ben. Hasonlóan a H egy pontjához is csak egy G-beli pont tartozik.

A leképezés továbbá folytonos is. Ha $P_1, P_2, \ldots$ egy pontsorozat a H-ban, melynek egyetlen torlódási pontja a P pont, akkor e sorozatból mindig kiválasztható egy $P_1', P_2', \ldots$ sorozat, a melynek G-beli megfelelő pontjai $p_1', p_2', p_3', \ldots$ a G-ben a P megfelelő pontjában p-ben torlódnak. Mert ha létezik a hálózatok sorozatában egy $J^{(\nu)}$ hálózat, amelyben végtelen sok terület található: $T_1, T_2, \ldots$, amelyek mindegyikében vagy a határán pontjai vannak a $P_1, P_2 \ldots$ sorozatnak, akkor P_1'-t a T_1-ből, P_2'-t a T_2-ből stb., választjuk ki s mivel $T_1, T_2, \ldots$ a P-ben torlódnak, azért megfelelő területeik $t_1, t_2, \ldots$ is a p-ben torlódnak és így a belsejükben vagy határukon levő $p_1', p_2', \ldots$ pontok is.

Ha pedig bármely $J^{(\nu)}$-nek csak véges számú területében vagy ezek határán van a $P_1, P_2, \ldots$ sorozat, akkor $J^{(1)}$-nél kiválasztható egy T_1 terület, melyben végtelen sok pontja van a sorozatnak. T_1-en belül léteznie kell az $J^{(2)}$ területei közül legalább egy T_2-nek, melyben szintén végtelen sok pontja van a sorozatnak, mert különben végtelen sok $J^{(2)}$-beli terület létezne a T_1-ben, amelyben pontjai vannak a sorozatnak. Így található a $T_1, T_2, \ldots$ területek sorozata, melyek fokonként egymáson belül feküsznek és a P-ben torlódnak. Ezeknek hasonló egymáson belül levő $t_1, t_2, \ldots$ területek felelnek meg a G-ben, melyek a p-ben torlódnak.

Ekkor P_1'-t a T_1-ben, a P_2'-t a T_2-ben, stb. választjuk ismét. A megfelelő $p_1', p_2', \ldots$ pontok a p-ben torlódnak.

Ebből következik az is, hogy nem létezhetik olyan P-ben torlódó H-beli $P_1, P_2, \ldots$ pontsorozat, a melynek megfelelő pontjai $p_1, p_2, \ldots$ egy p-től különböző pontban torlódnak. Mert ekkor nem volna kiválasztható belőle az előbbi $P_1', P_2', \ldots$ sorozat.

A leképezés tehát folytonos is és pedig a kölcsönös egyértékűség miatt kölcsönösen folytonos.

*

Mély hálával kell még megemlékeznem dr. Riesz Frigyes professzor úrról, a ki nemcsak felkeltette érdeklődésemet e probléma iránt, hanem később is jóakaró tanácsaival és útbaigazításaival támogatott e dolgozat elkészítésében.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA